Úvod do limitných prechodov

Vladimír Janiš

BELIANUM

ÚVOD DO LIMITNÝCH PRECHODOV

© Autor: doc. RNDr. Vladimír Janiš, CSc.
Recenzenti: doc. RNDr. Martin Kalina, CSc.
RNDr. Pavol Kráľ, PhD.

Vydavateľ: © Belianum. Vydavateľstvo Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici.
Edícia: Fakulta prírodných vied

Prvé vydanie, 2016.
Schválila Edičná komisia FPV UMB v Banskej Bystrici ako vysokoškolské skriptum. Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-557-1077-8

Obsah

1 Úvod

Cieľom tohoto textu je oboznámiť čitateľa so základnými pojmami potrebnými v štúdiu matematickej analýzy. Pôjde najmä o skúmanie vlastností podmnožín množiny všetkých reálnych čísel, zavedenie pojmov supremum a infimum množiny a pojmu hromadný bod množiny. V záverečných častiach sa zaoberáme postupnosťami reálnych čísel a zavedieme pojem limity postupnosti, ako jeden zo základných pojmov matematickej analýzy. Ako ukážky využitia tohoto pojmu uvádzame Cantorovu vetu a definíciu súčtu nekonečného číselného radu.

Text je určený predovšetkým pre študentov prvého ročníka matematiky v učiteľskom aj neučiteľskom štúdiu. S mnohými zavádzanými pojmami sa čitateľ už určite stretol na strednej škole. Je ale dobré uvedomiť si ich vzájomné súvislosti a dôkladne si ich premyslieť.

Až na jeden prípad (Propozícia 10) vyslovované tvrdenia dokazujeme. Koniec dôkazu je označený symbolom ♣. Výnimku tvoria mimoriadne jednoduché tvrdenia, ktoré prenechávame čitateľovi ako cvičenia. Aj v prípadoch, kedy je dôkaz uvedený v texte, ale odporúčame čitateľovi aby sa oňho aspoň pokúsil aj samostatne. Je možné, že nájde aj iný postup, ako je tu uvedený. Propozície, rovnako ako definície a cvičenia sú číslované v celom texte priebežne.

Pozornosť je treba venovať nielen definíciám a tvrdeniam (v texte označené ako propozície), ale aj komentujúcemu textu. Často sú práve v ňom uvedené vysvetlenia nevyhnutné pre pochopenie súvislostí. Ako pri každom matematickom texte, aj tu odporúčame, aby čitateľ nepokračoval ďalej, kým dokonale nepochopí prečítané. Ideálnym spôsobom štúdia je čítanie súčasne s robením si poznámok. Tak napríklad pri každej definícii nového pojmu je vhodné, aby čitateľ sám vymyslel niekoľko objektov, ktoré uvedenú vlastnosť majú a tiež niekoľko takých, ktoré ju nemajú. Podobne pri propozíciách je dobré všimnúť si ich predpoklady a zamyslieť sa, či sú nevyhnutné a prečo. Pokiaľ má propozícia tvar implikácie, je užitočné pouvažovať, či je pravdivá aj obrátená implikácia.

Pri štúdiu textu je mimoriadne vhodné používať vhodné vizualizácie. Odporúčam čitateľovi, aby si pri každej úvahe nakreslil obrázok. Je to možné pri takmer všetkých definíciách, tvrdeniach a cvičeniach.

Text je sprevádzaný niekoľkými cvičeniami počas výkladu a tiež ďalšími v osobitnej časti na záver každej kapitoly. Úlohou cvičení vyriešených v texte je ilustrácia diskutovanej témy a čitateľ by v žiadnom prípade nemal podľahnúť klamnému dojmu, že tieto cvičenia sú dostačujúce pre dokonalé zvládnutie problematiky. Na cvičeniach v záveroch kapitol si môže čitateľ overiť správne porozumenie preberanej téme. Niekedy sa na tieto cvičenia odvolávame aj v texte, ich zvládnutie je teda takmer nevyhnutné. Okrem nich je ale vhodné aj siahnuť po špecializovaných zbierkach úloh. Je pravda, že snáď až na limity postupností tu nejde o úlohy na rutinné počítanie, na aké je asi čitateľ zvyknutý zo strednej školy. Namiesto algoritmických postupov je potrebné oveľa väčšiu pozornosť venovať dôkladnému pochopeniu pojmov.

Na kurz úvodu do limitných prechodov, ktorému je venovaný tento text, nadväzujú kurzy matematickej analýzy, kde sa s preberanými pojmami pracuje do väčšej hĺbky. Preto boli niektoré oblasti, najmä v časti o limitách postupností zámerne vynechané, nakoľko by ich zaradenie do tohoto textu neúmerne zväčšilo jeho rozsah, čím by sa naopak znížil dôraz na porozumenie základných pojmov. Nezaoberáme sa teda špeciálnymi limitami elementárnych funkcií, ani nezavádzame Eulerovu konštantu. Podobne pri definícii súčtu nekonečného radu neuvádzame žiadne vlastnosti nekonečných radov. Na druhej strane, mnohé dôkazy a komentáre sú snáď obšírnejšie a zdĺhavejšie, ako je to obvyklé. Ide o zámer, nakoľko väčšina absolventov stredných škôl má s matematickou argumentáciou len malé a často aj žiadne skúsenosti. Čitateľ sa ale musí pripraviť na to, že v ďalšom štúdiu sa bude v špecializovanej matematickej literatúre stretávať s oveľa stručnejšími formuláciami.

V poslednej časti uvádzame niekoľko odkazov na literatúru, kde si čitateľ môže poznatky precvičiť na úlohách alebo prehĺbiť. Ide iba o malú vzorku dostupnej literatúry, v žiadnom prípade nie o jej úplný zoznam.

Na záver úvodu sa chcem poďakovať všetkým, ktorí prispeli ku vzniku tohoto textu. Sú to predovšetkým študenti učiteľského aj neučiteľského štúdia matematiky na Fakulte prírodných vied UMB v Banskej Bystrici. Ich nejasnosti, chyby a otázky v prvom roku štúdia mi pomohli ujasniť si, ktoré oblasti si vyžadujú podrobnejšie vysvetlenie. Rovnako ďakujem recenzentom, Doc. RNDr. Martinovi Kalinovi, CSc. a RNDr. Pavlovi Kráľovi, PhD. za dôkladné prečítanie textu a upozornenia na jeho nedostatky.

V Banskej Bystrici, 30. 1. 2016.

Vladimír Janiš

2 Množiny a zobrazenia

Takmer všetky pojmy v tejto kapitole budú čitateľovi známe už zo strednej školy. Pôjde hlavne o ich dôkladnejšie ujasnenie, ale uvedieme aj niektoré nové vlastnosti súvisiace s konečnými a nekonečnými množinami.

2.1 Množiny a vzťahy medzi nimi

Predpokladáme, že pojem množiny je z predchádzajúceho štúdia intuitívne zrejmý a nebudeme sa pokúšať o jeho korektnú definíciu. Rovnako predpokladáme, že čitateľovi sú známe operácie prieniku a zjednotenia množín, ako aj doplnok množiny.

V tomto texte sa budeme takmer výlučne zaoberať podmnožinami množiny všetkých reálnych čísiel ktorú budeme označovať symbolom R. Ako obvykle, množiny budeme označovať veľkými písmenami. Skutočnosť, že prvok x patrí do množiny A, zapisujeme $x \in A$. Prienik množín A, B označujeme $A \cap B$, je to množina všetkých prvkov patriacich súčasne do A aj B. Ich zjednotenie označujeme $A \cup B$, patria doňho všetky prvky patriace do aspoň jednej z množín A, B. Na označenie prieniku väčšieho konečného počtu množín $A_1, A_2, \ldots, A_n$ používame zápis $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \cap_{k=1}^{n} A_k$ (podobne pre zjednotenie), na označenie prieniku nekonečného systému množín $A_1, A_2, \ldots$ symbol $\cap_{k=1}^{\infty} A_k$ (takisto podobne pre zjednotenie). Ak ide o systém množín $\{A_\gamma\}$ s indexami v množine Γ, ich prienik označujeme $\cap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, podobne zjednotenie. Doplnok množiny A sa obvykle označuje A', ak je zrejmé, v akej množine sa tento doplnok uvažuje, alebo tiež $X \setminus A$ ak chceme zdôrazniť, že ide o doplnok v základnej množine X.

Množinu ktorá neobsahuje žiadne prvky, nazývame prázdnou množinou a označujeme $\emptyset$.

Symbolom $A \subseteq B$ zapisujeme že každý prvok množiny je súčasne aj prvkom množiny B, teda množina A je podmnožinou množiny B. Takýto vzťah sa nazýva (množinová) inklúzia. Rovnosť $A = B$ nastáva práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a súčasne $B \subseteq A$. Na tomto základe obvykle ukazujeme rovnosť dvoch množín, teda dokážeme obe inklúzie. Skutočnosť, že $A \subseteq B$ a súčasne $A \neq B$ vyjadrujeme formuláciou, že A je vlastnou podmnožinou B.

Niektoré symboly zvykneme používať pre isté špeciálne podmnožiny. Uvedieme najdôležitejšie podmnožiny množiny všetkých reálnych čísel.

Symbolom N označujeme množinu všetkých prirodzených čísel, teda $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. V niektorej literatúre sa aj nula považuje za prirodzené číslo. Ide výlučne o vec dohody a v tomto texte nulu za prirodzené číslo považovať nebudeme.

Symbolom Z označujeme množinu všetkých celých čísel, teda Z je zjednotením množiny všetkých prirodzených čísel, množiny všetkých čísel k nim opačných a jednoprvkovej množiny obsahujúcej nulu. (Všimnite si, že v závere predchádzajúcej vety nemôžeme napísať "... a nuly", pretože nula je číslo a nie množina, a teda nemôžeme s ním vykonávať operáciu zjednotenia.)

Symbol Q obvykle označuje množinu všetkých racionálnych čísel, teda čísel, ktoré je možné zapísať ako podiel celého a prirodzeného čísla.

Na tejto úrovni zatiaľ nie je možné podať korektnú definíciu pojmu reálne číslo, preto budeme predpokladať istú intuitívnu znalosť vychádzajúcu zo skutočnosti, že každý prvok číselnej osi reprezentuje jedno reálne číslo. Množinu všetkých reálnych čísel budeme označovať symbolom R a vzhľadom na jej stotožnenie s bodmi číselnej osi budeme často používať pojem bod ako synonymum pojmu reálne číslo.

Namiesto úplnej definície aspoň v nasledujúcom cvičení ukážeme, že existujú reálne čísla, ktoré nie sú racionálne.

Cvičenie 1 *Ukážeme, že číslo $\sqrt{2}$ nie je racionálne.*

Predpokladajme, že $\sqrt{2}$ racionálne je. V takom prípade sa podľa definície racionálnych čísel dá zapísať ako zlomok $\frac{p}{q}$, kde $p \in Z, q \in N$. Zároveň predpokladáme, že tento zlomok je zapísaný v základnom tvare. Úpravou rovnosti $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dostávame $\sqrt{2}q = p$. Ak sa tieto dve čísla rovnajú, rovnajú sa aj ich druhé mocniny, teda $2q^2 = p^2$. Odtiaľto vidíme, že číslo p^2 je párne. Preto aj p musí byť párne (ak by bolo nepárne, jeho druhá mocnina by bola tiež nepárna). Môžeme ho teda zapísať ako $p = 2k$, kde $k \in Z$. Pri tomto označení má rovnosť $2q^2 = p^2$ tvar $2q^2 = (2k)^2$ a teda $2q^2 = 4k^2$. Po vydelení dvomi dostávame $q^2 = 2k^2$. Tou istou úvahou, akú sme v tomto cvičení už použili, zistíme že aj číslo q je párne. To je však v rozpore s predpokladom, že zlomok $\frac{p}{q}$ je v základnom tvare. Teda číslo $\sqrt{2}$ nie je racionálne.

Reálne čísla, ktoré nie sú racionálne, sa nazývajú iracionálne. Pokúste sa podobným spôsobom ukázať, že čísla $\sqrt{3}$ alebo $\sqrt{5}$ sú iracionálne. Na základe týchto úvah už nie je ťažké ukázať, že ak n je prirodzené číslo, tak $\sqrt{n}$ je buď prirodzené alebo iracionálne (cvičenie 10).

Nakoľko s istými typmi podmnožín R sa budeme stretávať pomerne často, je výhodné zaviesť pre ne osobitné označenia. Ide najmä o intervaly, ktoré môžu byť nasledujúcich typov (v nasledujúcom predpokladáme $a, b \in R, a < b$):

- otvorené intervaly:

  $(a, b) = \{x \in R; a < x < b\}$,

  $(a, \infty) = \{x \in R; a < x\}$,

  $(-\infty, a) = \{x \in R; x < a\}$,

- polouzavreté intervaly:

  $[a, b) = \{x \in R; a \leq x < b\}$,

  $(a, b] = \{x \in R; a < x \leq b\}$,

- uzavreté intervaly:

  $[a, b] = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$,

  $[a, \infty) = \{x \in R; a \leq x\}$,

  $(-\infty, a] = \{x \in R; x \leq a\}$.

Symbolu ∞ nie je treba pripisovať nijaký osobitný význam a môžeme ho chápať iba ako súčasť označenia príslušných množín.

Dôležitou vlastnosťou reálnych čísel je takzvaná Archimedova vlastnosť. Jedna z jej verzií je takáto: Ak sú ε, x ľubovoľné kladné reálne čísla, tak existuje prirodzené číslo n také, že $n\varepsilon > x$.

2.2 Zobrazenia

Nech A, B sú ľubovoľné množiny. Pod zobrazením množiny A do množiny B rozumieme priradenie, ktoré každému prvku množiny A priradí najviac jeden prvok množiny B. Príkladom takého zobrazenia môže byť číslo cestovného pasu (predpokladáme, že každý občan Slovenskej republiky buď cestovný pas nemá alebo ho má iba jeden). V tomto prípade tvoria množinu A všetci občania Slovenskej republiky množinu B všetky prirodzené čísla. Už na tomto príklade si môžeme všimnúť minimálne dve skutočnosti. Nie každý občan Slovenskej republiky má cestovný pas a súčasne nie každé prirodzené číslo je číslom niektorého cestovného pasu. Preto si osobitne všimneme zobrazenia s istými špeciálnymi vlastnosťami.

Zároveň je dobré uvedomiť si, že z formálneho hľadiska môžeme zobrazenie z množiny A do množiny B chápať tiež ako podmnožinu kartézskeho súčinu $A \times B$. Pripomíname, že $A \times B = \{[a, b]; a \in A, b \in B\}$. Takto sa zobrazenie môže aj definovať. Prvky množiny A sa nazývajú vzory, prvky množiny B sa nazývajú obrazy.

Zobrazenia sa obvykle označujú malými písmenami, pričom ak napríklad f je zobrazenie z množiny A do množiny B, zapisujeme $f : A \to B$. Ak sa prvok $x \in A$ zobrazí na prvok $y \in B$ (teda dvojica $[x, y]$ patrí do zobrazenia f), zapisujeme $y = f(x)$. Teda y je obrazom vzoru x.

Príkladom zobrazenia z množiny R do množiny R je prevrátená hodnota čísla, teda zobrazenie dáme predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$. Tu, rovnako ako v príklade o cestovných pasoch, nemá každý vzor svoj obraz. Konkrétne k nule neprislúcha žiaden obraz, nakoľko prevrátená hodnota nuly neexistuje. Všimnime si teda tie prvky množiny A, pre ktoré ich obraz existuje.

Definícia 1 *Nech $f : A \to B$ je zobrazenie. Množinu všetkých tých $x \in A$ pre ktoré existuje ich obraz v zobrazení f, nazývame definičný obor zobrazenia f a označujeme $D(f)$.*

Teda definičným oborom zobrazenia z príkladu o číslach pasov sú všetci držitelia cestovného pasu Slovenskej republiky. Definičným oborom zobrazenia $f(x) = \frac{1}{x}$ je množina $R \setminus \{0\}$ a definičným oborom zobrazenia $g(x) = \sqrt{x}$ je interval $[0, \infty)$.

V súvislosti s definičným oborom je dobré prijať nasledujúcu konvenciu: Ak budeme hovoriť o zobrazení z A do B, pripúšťame, že definičným oborom nemusí byť celá množina A, ale iba niektorá jej podmnožina. Ak ale hovoríme o zobrazení množiny A do množiny B (teda bez predložky z), máme tým na mysli, že definičným oborom príslušného zobrazenia je celá množina A.

Podobne môžeme uvažovať aj o prvkoch množiny B. V príklade o pasoch sme videli, že nie každé číslo je aj číslom cestovného pasu. Predpokladáme, že neexistuje cestovný pas s číslom 1 a s istotou môžeme tvrdiť, že ani s číslom $\sqrt{3}$.

Definícia 2 *Nech $f : A \to B$ je zobrazenie. Množinu všetkých tých $y \in B$ pre ktoré existuje $x \in A$ tak, že $y = f(x)$ nazývame obor hodnôt zobrazenia f a označujeme $H(f)$.*

Vhodná voľba predložiek opäť umožní odlíšiť situáciu, kedy je obor hodnôt zobrazenia podmnožinou množiny B a tú, kedy sa jej rovná. V prvom prípade hovoríme o zobrazení do množiny B, v druhom o zobrazení na množinu B.

2.3 Injektívne a surjektívne zobrazenia

Všimnime si zobrazenie $f : R \to R$ dané predpisom $f(x) = x^2$. Vidíme, že $D(f) = R$, $H(f) = [0, \infty)$. Môžeme teda povedať, že ide o zobrazenie množiny všetkých reálnych čísel na množinu všetkých nezáporných reálnych čísel. Vlastnosťou f, ktorú si teraz všimneme, je skutočnosť, že dva rôzne vzory sa môžu zobraziť na rovnaký obraz, Napríklad $f(-3) = f(3) = 9$, vo všeobecnosti sa každé číslo a číslo k nemu opačné zobrazia na to isté číslo.

Niekedy nás môžu zaujímať zobrazenia, ktoré takúto vlastnosť nemajú. Napríklad aj zobrazenie z príkladu o cestovných pasoch by ju mať celkom iste nemalo – dvaja rôzni občania Slovenskej republiky by nemali mať cestovné pasy s tým istým číslom.

Definícia 3 *Zobrazenie sa nazýva injektívne, ak dvom rôznym vzorom priradí dva rôzne obrazy.*

Typickým príkladom injektívneho zobrazenia je zobrazenie, ktoré každému občanovi Slovenskej republiky priradí jeho rodné číslo. Príkladom zobrazenia, ktoré nie je injektívne, je zobrazenie celého čísla na jeho ciferný súčet, nakoľko existujú rôzne čísla s rovnakým ciferným súčtom. (Dokonca pre každý ciferný súčet je takýchto čísel nekonečne veľa.)

Zobrazenia, najmä ak počty prvkov množín A, B nie sú veľké, môžeme graficky reprezentovať ako sústavu šípok vedúcich od vzoru k jeho obrazu. Pri tejto reprezentácii môžeme názorne popísať injektívne zobrazenie ako také, v ktorom žiadna dvojica šípok s rôznym začiatočným bodom nemá rovnaký koncový bod.

Synonymom pre pojem injektívne zobrazenie je pojem prosté zobrazenie.

V súvislosti so skúmaním vlastností zobrazení bude užitočný aj nasledujúci pojem.

Definícia 4 *Zobrazenie na množinu sa nazýva surjektívne zobrazenie.*

Príkladom surjektívneho zobrazenia ja zobrazenie z množiny všetkých občanov SR do množiny všetkých obcí v SR, ktoré každému občanovi priradí obec, kde má trvalé bydlisko. Predpokladáme pritom, že v každej obci býva aspoň jeden človek.

V ďalšom budeme využívať zobrazenia, ktoré sú súčasne injektívne aj surjektívne. Pre zjednodušenie formulácii preto aj pre ne zavedieme osobitné pomenovanie.

Definícia 5 *Zobrazenie množiny A na množinu B, ktoré je injektívne a súčasne surjektívne, sa nazýva bijektívne zobrazenie (bijekcia).*

2.4 Ekvivalencia množín

Motiváciou pre túto časť je úloha zistiť, či majú dve dané množiny rovnaký počet prvkov. Pokiaľ počty prvkov v oboch množinách nie sú veľké, postup je jednoduchý.

Zistíme počty prvkov v oboch množinách a tieto dve čísla porovnáme. Ak sú rovnaké, hovoríme, že dané množiny majú rovnaký počet prvkov. Tento postup je z pochopiteľných príčin nepoužiteľný pre nekonečné množiny, ale už aj pri konečných môžeme naraziť na praktické problémy, ak sú počty prvkov v oboch množinách príliš veľké.

Ak je ale našou úlohou iba zistiť, či sú počty prvkov v oboch množinách rovnaké, ale nie je potrebné vedieť aké, ponúkajú sa aj iné možnosti. Uvedieme dva príklady, jeden z oblasti urbanizmu, jeden z oblasti živočíšnej výroby.

Cvičenie 2 *Na ulici sú lampy pouličného osvetlenia na oboch stranách, v pároch oproti sebe. Táto informácia je postačujúca na to, aby sme mohli tvrdiť, že počet lámp na pravej a ľavej strane ulice je rovnaký, bez toho, aby sme tento počet zisťovali.*

Cvičenie 3 *Vo dvoch ohradách sú hospodárske zvieratá. Ak chceme zistiť, či sú ich počty v oboch ohradách rovnaké, môžeme ich z nich vypúšťať po dvojiciach, jedno z jednej ohrady a druhé súčasne z druhej. Ak sú po vypustení poslednej dvojice obe ohrady prázdne, počty zvierat v nich boli rovnaké, inak nie.*

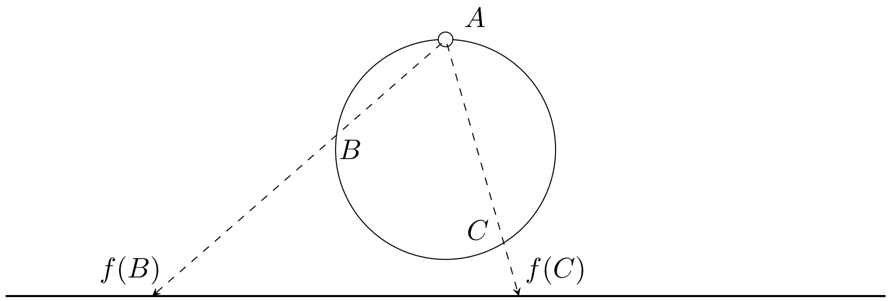
Spoločným rysom oboch uvedených situácií je konštrukcia istého zobrazenia. V prvom prípade lampe na jednej strane ulice priradíme lampu stojacu oproti nej, v druhom zvieraťu vychádzajúcemu z jednej ohrady zároveň vychádzajúce zviera z druhej ohrady. Jednoduchá úvaha ukazuje, že v prípade rovnakého počtu lámp a zvierat ide o bijekciu a naopak, práve vlastnosti bijekcie zaručujú, že v oboch množinách bude rovnaký počet prvkov. Preto uvedieme nasledujúcu definíciu.

Definícia 6 *Dve množiny sa nazývajú ekvivalentné, ak medzi nimi existuje bijekcia.*

Je na mieste otázka, prečo sa v definícii 6 zavádza pojem ekvivalentných množín, keď by snáď bolo prirodzenejšie povedať, že príslušné množiny majú rovnaký počet prvkov. Toto by určite bolo v poriadku, ak by sme sa obmedzili iba na konečné množiny. Všimnime si ale, že pojem bijektívneho zobrazenia je rovnako dobre možné použiť ako pre konečné, tak aj pre nekonečné množiny. A práve pri nekonečných množinách by pojem počtu prvkov pôsobil pomerne zvláštne, preto uprednostňujeme termín ekvivalentné množiny.

Už v predchádzajúcom texte sme viackrát použili pojem konečnej a nekonečnej množiny v nádeji, že čitateľovi sú tieto pojmy intuitívne zrejmé. Poznamenajme iba, že Definícia 6 nám ich umožňuje aj formálne korektne zaviesť.

Definícia 7 *Množina je konečná, ak je prázdna, alebo je ekvivalentná množine* $\{1, 2, \ldots, k\}$, *kde* $k \in N$. *Množina je nekonečná, ak nie je konečná.*



Obr. 2.1: Bijekcia medzi bodmi kružnice (s výnimkou jedného) a bodmi priamky

Ako cvičenia odporúčame čitateľovi podrobne dokázať nasledujúce tvrdenia (v tomto texte ich budeme označovať slovom propozícia, v iných textoch sa môžete stretnúť aj s pojmami veta, prípadne teoréma).

Propozícia 1 *Každá množina je ekvivalentná sama so sebou.*

Propozícia 2 *Ak je množina A ekvivalentná s množinou B, tak aj množina B je ekvivalentná s množinou A.*

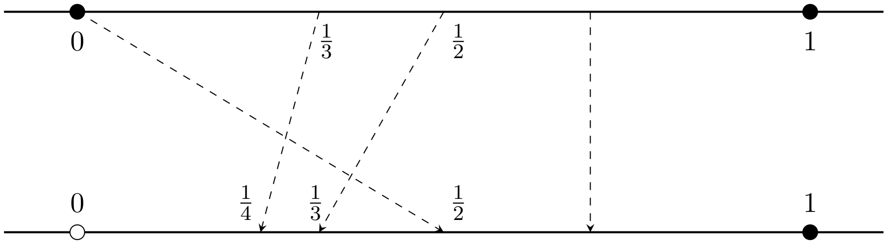
Propozícia 3 *Ak je množina A ekvivalentná s množinou B a množina B je ekvivalentná s množinou C, tak aj množina A je ekvivalentná s množinou C.*

Vo všetkých troch prípadoch ide iba o nájdenie vhodnej bijekcie.

Ak chápeme pojem ekvivalentnosti množín ako zovšeobecnenie pojmu "množiny s rovnakým počtom prvkov", dostaneme sa k výsledkom, ktoré z tohoto hľadiska môžu pôsobiť do istej miery paradoxne. Tak napríklad množina všetkých prirodzených čísel je ekvivalentná s množinou všetkých párnych prirodzených čísel, aj keď by naivný pohľad mohol napovedať, ze párnych čísel je iba "polovica". Stačí ale uvážiť zobrazenie $f(n) = 2n$, ktoré je bijekciou množiny N na množinu všetkých párnych prirodzených čísel.

Iným možno prekvapujúcim tvrdením je existencia bijekcie medzi všetkými bodmi kružnice s výnimkou jedného a všetkými bodmi priamky. Táto bijekcia je zrejmá z obrázku 2.1.

Vzniká prirodzená otázka, či existuje aj bijekcia medzi množinou všetkých bodov kružnice a množinou všetkých bodov priamky. Odpoveď prenechávame čitateľovi, ako návod uvádzame nasledujúce cvičenie.



Obr. 2.2: Bijekcia medzi uzavretým a polouzavretým intervalom

Cvičenie 4 *Príklad bijekcie medzi množinou všetkých bodov úsečky a množinou všetkých bodov úsečky s výnimkou jedného koncového bodu. Toto zobrazenie si môžeme predstaviť aj ako bijekciu medzi intervalmi* $[0, 1]$ *a* $(0, 1]$ *dané predpisom*

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k+1}, k \geq 2 \quad f(x) = x \quad \text{ak} \quad x \notin \left\{\frac{1}{k}, k \in N \setminus \{1\}\right\} \cup \{0\}.$$

Zobrazenie ilustruje obrázok 2.2.

Aj keď v tomto príklade išlo o bijekciu medzi dvomi intervalmi rovnakej dĺžky, predpokladáme, že čitateľ na základe podobnej úvahy dokáže nájsť bijekciu medzi ľubovoľným intervalom $[a, b]$ a intervalom $(c, d]$. Jednoduchou modifikáciou je možné nájsť aj bijekciu medzi intervalmi $[a, b]$ a (c, d).

Podobným spôsobom sa dá ukázať aj bijekcia medzi intervalom $[a, b)$ a intervalom $[c, \infty)$. (Nakreslite si úsečku s intervalom $[a, b)$ kolmo k polpriamke $[c, \infty)$.) Môžeme teda tvrdiť, že medzi ľubovoľnou dvojicou intervalov existuje bijekcia. Na základe existencie bijekcie medzi množinou R a všetkými bodmi priamky sa to isté dá povedať aj o ľubovoľnej dvojici úsečiek a polpriamok, či už obsahujúcich koncové body alebo nie. Vo všetkých prípadoch teda ide o ekvivalentné množiny.

2.5 Spočítateľné a nespočítateľné množiny

Definícia ekvivalencie a príklady uvedené v predchádzajúcej časti môžu vyvolať otázku, či nie sú všetky nekonečné množiny navzájom ekvivalentné. Doteraz sme sa totiž s dvojicou nekonečných a nie ekvivalentných množín nestretli. Odpoveď je záporná, ako uvidíme neskôr v tejto časti, nie všetky nekonečné množiny sú navzájom ekvivalentné. Preto uvedieme nasledujúcu definíciu:

Definícia 8 *Množina sa nazýva spočítateľná, ak je ekvivalentná s niektorou podmnožinou množiny všetkých prirodzených čísel. Inak sa nazýva nespočítateľná.*

Spočítateľné sú teda v zmysle Definície 9 všetky konečné množiny, takisto aj prázdna množina. Spočítateľná je aj množina N, pretože je tiež podmnožinou množiny N. Z definície vidíme, že spočítateľné sú tie množiny, ktorých prvky sa dajú očíslovať prirodzenými číslami.

Cvičenie 5 *Ukážeme, že Z, teda množina všetkých celých čísel, je spočítateľná. Vhodnou bijekciou je napríklad zobrazenie $f : N \to Z$ také, že $f(1) = 0$, $f(2n) = -n$, $f(2n+1) = n$ pre všetky $n \in N$. Odporúčame čitateľovi dôkladne si overiť, že ide o bijekciu.*

Rovnakú vlastnosť má aj množina všetkých racionálnych čísel.

Cvičenie 6 *Ukážeme, že množina všetkých racionálnych čísel je spočítateľná. Pre každé $n \in N$ nech A_n je množina všetkých nezáporných zlomkov, kde súčet čitateľa a menovateľa v základnom tvare je n a zlomkov k nim opačných. Za základný tvar nuly budeme považovať zlomok $\frac{0}{1}$. Teda napríklad*

$$A_1 = \left\{\frac{0}{1}\right\}, A_2 = \left\{-\frac{1}{1}, \frac{1}{1}\right\}, A_3 = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, \frac{2}{1}\right\}, A_4 = \left\{-\frac{1}{3}.\frac{1}{3}, -\frac{3}{1}, \frac{3}{1}\right\}.$$

Zrejme je každá z množín A_n konečná a každé racionálne číslo sa vyskytuje v práve jednej z nich (číslo $\frac{m}{n}$ je v množine A_{m+n}). Prvky týchto množín očíslujeme prirodzenými číslami tak, že číslo v množine A_1 bude mať poradové číslo 1, čísla v množine A_2 poradové čísla 2,3, čísla v množine A_3 poradové čísla 4,5,6,7 a tak ďalej. Týmto spôsobom sme vytvorili bijekciu medzi N a zjednotením množín $A_1, A_2, A_3, \dots$, čo je ale množina Q.

Ako teda vidíme, množiny N, Z, Q sú spočítateľné. Ako sme uviedli na začiatku tejto časti, ukážeme príklad nekonečnej množiny, ktorá nie je ekvivalentná s N, čiže je nespočítateľná.

Takouto množinou je napríklad interval $[0, 1]$. Nespočítateľnosť tejto množiny ukážeme sporom. Predpokladajme, že je spočítateľná. To by ale znamenalo, že všetky jej prvky môžeme očíslovať prirodzenými číslami. Pri každom takomto očíslovaní môžeme prvky tohoto intervalu zoradiť do nekonečného stĺpca tak, že prvé číslo bude v prvom riadku, druhé v druhom a tak ďalej. Príkladom začiatku takého stĺpca môžu byť čísla

0,38474638347498766 ...

0,98787854664564533 ...

0,00280278937264463 ...

atď.

Ukážeme, že predpoklad o tom, že v takomto stĺpci sú všetky čísla z intervalu $[0, 1]$, je nesprávny. Zostrojme takéto číslo: pred desatinnou čiarkou bude nula, na prvom mieste za ňou bude iná číslica ako tá na prvom mieste v prvom čísle stĺpca (v našom príklade iná ako 3), na druhom mieste za čiarkou bude iná číslica ako tá na druhom mieste v druhom čísle stĺpca (v našom príklade iná ako 8), podobne tretia číslica za čiarkou bude iná ako 2 a tak ďalej. Takto dostaneme číslo v intervale $[0, 1]$, ktoré sa v našom stĺpci nenachádza, pretože sa od každého z nich líši (od n-tého čísla na n-tom desatinnom mieste). To je v spore s naším predpokladom.

Popísaný postup má jedno slabé miesto. Je totiž založený na predpoklade, že ak majú dve reálne čísla rôzny desatinný rozvoj, sú navzájom rôzne. Toto tvrdenie ale nie je pravdivé. Tak napríklad zápisy $1,\overline{0}$ a $0,\overline{9}$ kde čiarka označuje periódu sú síce rôzne, dokonca vo všetkých desatinných miestach, ale obe sa rovnajú, sú to len rôzne zápisy čísla 1. Mohlo by sa teda stať, že číslo ktoré zostrojíme, už v stĺpci bude, aj keď inak zapísané. Tomuto sa vyhneme tak, že číslice v uvedenom postupe budeme voliť tak, aby neboli "susedné" k číslici, od ktorej majú byť rôzne, teda ak je na n-tom mieste n-tého čísla číslica 9, do konštruovaného čísla si na tomto mieste nezvolíme 0 ani 8, ale napríklad 5. Tak bude zaručené, že vzniknuté číslo bude skutočne rôzne od každého čísla v stĺpci.

Môžeme teda sformulovať nasledujúce tvrdenie:

Propozícia 4 *Množina R je nespočítateľná.*

Dôkaz je založený na skutočnosti, že každá podmnožina spočítateľnej množiny je tiež spočítateľná (podrobne si premyslite zdôvodnenie).

Na základe stotožnenia množiny R s množinou všetkých bodov priamky (číselná os) môžeme zároveň tvrdiť, že aj množina všetkých bodov priamky je nespočítateľná. Podobne, na základe úvah z kapitoly 2.4 sú nespočítateľné všetky intervaly a úsečky kladnej dĺžky.

Pri určovaní spočítateľnosti a nespočítateľnosti množín môže byť užitočné nasledujúce tvrdenie.

Propozícia 5 *Kartézsky súčin dvoch spočítateľných množín je spočítateľná množina.*

Dôkaz. Nech množiny A, B sú spočítateľné. Ak sú obe konečné, je konečný aj ich kartézsky súčin. Zaoberajme sa prípadom, kedy sú obe nekonečné. Je teda možné ich prvky očíslovať prirodzenými číslami a zapísať

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}.$$

Ich kartézskym súčinom je množina $A \times B = \{[a_m, b_n], m, n \in N\}$. Túto môžeme rozložiť na konečné podmnožiny

$$C_k = \{[a_m, b_n] \in A \times B; m + n = k\}, k \in N$$

a tieto očíslujeme podobne ako v cvičení 6, a teda množina $A \times B$ je spočítateľná.

Zostávajúci prípad, kedy je jedna z množín konečná a druhá nekonečná, sa ukáže analogicky. ♣

2.6 Cvičenia

1. Ak A, B, C sú množiny, tak $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Dokážte.
2. Ak A, B, C sú množiny, tak $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Dokážte.
3. Ak A, B sú množiny, tak $(A \cap B)' = A' \cup B', (A \cup B)' = A' \cap B'$. Dokážte. Tieto vzťahy sa nazývajú de Morganove rovnosti.
4. Ak A, B sú množiny, tak $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dokážte.
5. Dokážte, že číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ nie je racionálne.
6. Dokážte, že súčet, rozdiel, súčin a podiel (ak existuje) dvoch racionálnych čísel je racionálne číslo.
7. Dokážte, že súčet, rozdiel, súčin a podiel dvoch iracionálnych čísel môže ale nemusí byť racionálne číslo.
8. Dokážte, že súčet racionálneho a iracionálneho čísla je iracionálne číslo.
9. Dokážte, že súčin nenulového racionálneho a iracionálneho čísla je iracionálne číslo.
10. Dokážte, že ak n je prirodzené číslo, tak $\sqrt{n}$ je buď prirodzené alebo iracionálne číslo.
11. Koľko rôznych bijekcií existuje medzi dvomi konečnými množinami?
12. Nech množina A má m prvkov a množina B má n prvkov. Koľko rôznych zobrazení $f : A \to B$ existuje? Koľko z nich je injektívnych a koľko surjektívnych?
13. Nájdite predpis pre bijekciu medzi intervalmi $[a, b)$ a $(c, d]$.
14. Dokážte, že množiny $[1, 2)$ a $[1, \infty)$ sú ekvivalentné.
15. Dokážte, že množina všetkých bodov polpriamky a množina všetkých bodov priamky sú ekvivalentné.

16. Dokážte, že každá nekonečná množina obsahuje spočítateľnú podmnožinu.

17. Dokážte, že množina je ekvivalentná niektorej svojej vlastnej podmnožine práve vtedy, keď je nekonečná.

18. Nech p, q sú prvočísla, $p \neq q$. Potom $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ je iracionálne číslo. Dokážte.

19. Dokážte, že medzi každými dvomi rôznymi reálnymi číslami sa nachádza aspoň jedno racionálne číslo a aspoň jedno iracionálne číslo.

20. Nech A je množina všetkých dvojíc tvaru $[m, \sqrt{n}], m, n \in N$. Je A konečná, spočítateľná alebo nespočítateľná?

21. Nech A je konečná množina, nech B je nespočítateľná. Nech C je množina všetkých zobrazení z A do B. Je množina C konečná, spočítateľná alebo nespočítateľná?

22. Nech A je množina všetkých čísel v intervale $(0, 1)$, v ktorých dekadickom rozvoji sa vyskytujú iba číslice 0 a 1. Zistite, či je množina A spočítateľná.

23. Je množina všetkých polynomických funkcií s celočíselnými koeficientami spočítateľná alebo nespočítateľná?

3 Supremum a infimum

Množiny, ktorými sme sa zaoberali v predchádzajúcej časti, mohli byť ľubovoľné. Aj keď sme viackrát uvádzali ako príklady podmnožiny R, nevyužívali sme žiadne špeciálne vlastnosti reálnych čísel. V tejto časti budeme hovoriť iba o podmnožinách R. Podstatnou vlastnosťou množiny R, na ktorej budeme stavať naše úvahy, je skutočnosť, že ide o usporiadanú množinu – ak $a, b \in R$, tak nastane práve jedna z troch možností: $a = b, a < b, b < a$. (Neskôr zistíte, že pojem usporiadanej množiny je o niečo všeobecnejší.)

3.1 Ohraničené množiny

Všimnime si nasledujúce podmnožiny R:

$A = \{-4; -1; \frac{1}{3}; \sqrt{2}; 7; 13.2\}$	$D = (-\infty; 5]$
$B = [2, 9)$	$E = Z$
$C = \{x \in Q; x > 1\}$	$F = \{x \in R; x^2 \geq 3\}$

Ak si tieto množiny predstavíme na číselnej osi, vidíme jeden rozdiel medzi množinami v ľavom a pravom stĺpci. Kým pri množinách A, B, C sa dá nájsť nejaké reálne číslo tak, že všetky prvky príslušnej množiny budú od neho vpravo, pri množinách D, E, F to možné nie je. Túto vlastnosť špecifikujeme v nasledujúcej definícii.

Definícia 9 *Nech $A \subseteq R$. Ak existuje $d \in R$ tak, že pre všetky $a \in A$ je $d \leq a$, tak d sa nazýva dolné ohraničenie množiny A. Množina je zdola ohraničená, ak má aspoň jedno dolné ohraničenie.*

Dolným ohraničením množiny A je teda napríklad číslo -10, množiny B číslo 0 a množiny C číslo $\frac{1}{2}$. Zároveň vidíme, že ak má množina jedno dolné ohraničenie, má ich nekonečne veľa, pretože aj každé menšie číslo je tiež dolným ohraničením. Toto je dôvod, pre ktorý nie je možné zaviesť žiaden symbol pre dolné ohraničenie. Ak by sme sa totiž dolné ohraničenie množiny A rozhodli označovať napríklad A_d, dostali by sme sa k absurdným tvrdeniam, napríklad pre vyššie uvedenú množinu B by platilo $B_d = 0$ a zároveň $B_d = 1$, a teda $0 = 1$.

Neostrá nerovnosť v definícii dolného ohraničenia znamená, že dolným ohraničením množiny môže byť aj jej prvok, napríklad v uvedených množinách je číslo -4 dolným ohraničením množiny A a číslo 2 je dolným ohraničením množiny B. Toto ale nie je nevyhnutné, napríklad pri množine C žiaden jej prvok nie je jej dolným ohraničením. Ak takýto prvok množiny existuje, nazývame ho minimom danej množiny. Minimom množiny je teda jej prvok, ktorý je zároveň aj jej dolným ohraničením. Je zrejmé, že žiadna množina nemôže mať dve rôzne minimá. Minimum množiny A označujeme $\min A$.

Uvedené úvahy môžeme zopakovať aj s opačnou nerovnosťou, tu uvedieme iba príslušnú definíciu.

Definícia 10 *Nech $A \subseteq R$. Ak existuje $h \in R$ tak, že pre všetky $a \in A$ je $h \geq a$, tak h sa nazýva horné ohraničenie množiny A. Množina je zhora ohraničená, ak má aspoň jedno horné ohraničenie.*

Podobne ako dolné, aj horné ohraničenie množiny A môže (ale nemusí) byť prvkom danej množiny. Ak je, nazýva sa maximum množiny A a označuje $\max A$.

Z množín uvedených na začiatku tejto časti sú zhora ohraničené množiny A, B, D. Teda množiny A, B sú ohraničené zdola aj zhora. O takýchto množinách hovorí nasledujúca definícia.

Definícia 11 *Množina je ohraničená, ak je ohraničená zdola aj zhora.*

Zaujímavá, aj keď iba po formálnej stránke, je otázka ohraničenosti prázdnej množiny. Dá sa ukázať, že $\emptyset$ je ohraničená, pričom ľubovoľné reálne číslo je jej dolným aj horným ohraničením. Stačí uvážiť, že implikácia s nepravdivým predpokladom je pravdivá. Užitočnejšie je ale nasledujúce tvrdenie.

Propozícia 6 *Ak je množina A zdola (zhora) ohraničená, ak $B \subseteq A$, tak aj B je zdola (zhora) ohraničená.*

Dôkaz. Platnosť tvrdenia ukážeme pre zdola ohraničené množiny, pre množiny ohraničené zhora sa ukáže podobne. Nech d je dolné ohraničenie množiny A (takéto d iste existuje, lebo A je zdola ohraničená. Potom d je aj dolným ohraničením množiny B. Skutočne, ak $b \in B$, tak aj $b \in A$, a teda $d \leq b$. ♣

Na základe Propozície 6 je možné sformulovať tvrdenie o ohraničenosti prieniku množín.

Propozícia 7 *Ak je aspoň jedna z množín A, B zdola (zhora) ohraničená, tak aj množina $A \cap B$ je zdola (zhora) ohraničená.*

Dôkaz. Platnosť tvrdenia opäť ukážeme pre zdola ohraničené množiny. Zrejme $A \cap B \subseteq A$ a tiež $A \cap B \subseteq B$. Aspoň jedna z množín A, B je však zdola ohraničená, a teda podľa propozície 6 je aj $A \cap B$ zdola ohraničená. ♣

Pokiaľ ide o zjednotenie množín, tu treba predpokladať ohraničenosť u oboch z nich.

Propozícia 8 *Ak sú množiny A, B zdola (zhora) ohraničené, tak aj množina $A \cup B$ je zdola (zhora) ohraničená.*

Dôkaz. Znovu sa obmedzíme na ohraničenosť zdola. Nech d_A je niektoré dolné ohraničenie množiny A, nech d_B je niektoré dolné ohraničenie množiny B. Označme $d = \min\{d_A, d_B\}$. Ukážeme, že d je dolné ohraničenie množiny $A \cup B$. Ak $c \in A \cup B$, tak $c \in A$ alebo $c \in B$. V prvom prípade je $c \geq d_A \geq d$, v druhom $c \geq d_B \geq d$. Vidíme teda, že $A \cup B$ je zdola ohraničená. ♣

Pomerne očividné je nasledujúce tvrdenie.

Propozícia 9 *Každá konečná množina je ohraničená.*

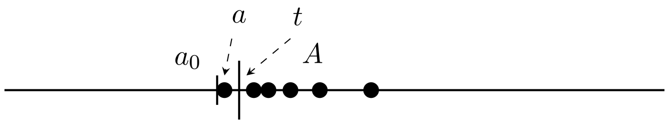
Dôkaz. Použijeme metódu dôkazu matematickou indukciou vzhľadom na počet prvkov množiny.

Ak je množina jednoprvková, je ohraničená, pričom jej dolným aj horným ohraničením je jej prvok.

Nech $k \in N$. Predpokladajme, že každá k-prvková množina je ohraničená. Nech množina A obsahuje $k + 1$ prvkov. Nech $a_0 \in A$. Potom množina $A \setminus \{a_0\}$ obsahuje k prvkov, a teda podľa indukčného predpokladu je ohraničená. Nech d jej ľubovoľné dolné ohraničenie a h jej ľubovoľné horné ohraničenie. Ak $d \leq a_0 \leq h$, tak d, h sú aj dolné a horné ohraničenia množiny A. Ak $a_0 < d$, tak a_0 je dolné ohraničenie množiny A a h jej horné ohraničenie. Ak $h < a_0$, tak d je dolné ohraničenie množiny A a a_0 jej horné ohraničenie. ♣

3.2 Infimum množiny

Pri úvahách o dolnom ohraničení množiny sme videli, že dolné ohraničenie množiny do tejto množiny môže a nemusí patriť. Interval $(1, 2)$ je zdola ohraničená množina, ale žiaden jej prvok nie je jej dolným ohraničením. Ak si všimneme množinu všetkých jej dolných ohraničení, vidíme, že číslo 1 v nej má istú špecifickú úlohu, je to totiž najväčšie dolné ohraničenie množiny $(1, 2)$.



Obr. 3.1: Infimum

Definícia 12 *Najväčšie dolné ohraničenie množiny A sa nazýva infimum tejto množiny a označuje* $\inf A$.

Nakoľko sme v definícii zaviedli aj označenie pre infimum množiny, v zmysle poznámok za definíciou 9 je treba ukázať, že žiadna množina nemôže mať viac ako jedno infimum. To je ale jednoduché – ak sú dve dolné ohraničenia množiny rôzne, musí byť jedno z nich väčšie ako druhé, a teda to druhé (menšie) už nemôže byť najväčšie dolné ohraničenie.

Dôležitou je otázka existencie infima. Množina, ktorá nie je zdola ohraničená, zrejme infimum mať nemôže, nakoľko nemá žiadne dolné ohraničenia, teda ani najväčšie. Z praktických dôvodov sa nebudeme zaoberať ani infimom prázdnej množiny. Zostávajú teda neprázdne zdola ohraničené množiny. Nasledujúce tvrdenie je dôsledkom vlastností množiny všetkých reálnych čísel, ktorými sa teraz nebudeme zaoberať, preto ho uvedieme bez dôkazu.

Propozícia 10 *Každá neprázdna zdola ohraničená podmnožina R má infimum.*

Pri overovaní, či isté číslo je alebo nie je infimom danej množiny, je často výhodné uvedomiť si, že $a_0 = \inf A$ práve vtedy, ak

- a_0 je dolné ohraničenie množiny A, teda pre všetky $a \in A$ je $a_0 \leq a$,
- žiadne číslo t väčšie ako a_0 už dolným ohraničením množiny A nie je, teda pre každé $t > a_0$ existuje $a \in A$ také, že $a < t$.

Druhú vlastnosť ilustruje obrázok 3.1 – ak sa od infima posunieme o ľubovoľne malý kúsok doprava, vždy sa nájde aspoň jeden prvok množiny A vľavo od takto posunutého bodu.

Nasledujúce tvrdenie objasňuje vzťah medzi infimom a minimom množiny.

Propozícia 11 *Nech $A \subseteq R, A \neq \emptyset$. Ak $m = \min A$, tak $m = \inf A$.*

Dôkaz. Nech $A \subseteq R, A \neq \emptyset, m = \min A$. Z definície minima vyplýva, že m je dolné ohraničenie množiny A. Ukážeme, že ide o najväčšie dolné ohraničenie. Nech $t > m$. V množine A sa ale nachádza prvok menší ako t, týmto prvkom je m, pretože minimum množiny je prvkom tejto množiny. ♣

Opačná implikácia ale nie je pravdivá, množina môže mať infimum nie však minimum. Príkladom takej množiny je interval $(1, 2)$. Pojem infima je teda z istého hľadiska jednoduchší ako pojem minima, pretože infimum má každá neprázdna zdola ohraničená podmnožina R, kým minimum iba niektoré z nich.

Použitie definície infima si ukážeme na nasledujúcom cvičení.

Cvičenie 7 *Ukážeme, že* $\inf\{\frac{2n+3}{n}; n \in N\} = 2$.

Najprv overíme, že 2 *je dolné ohraničenie danej množiny. To znamená, že nerovnosť*

$$2 \leq \frac{2n+3}{n}$$

musí byť splnená pre všetky prirodzené čisla n. Po násobení oboch strán nerovnosti číslom n (je kladné, teda bez zmeny znamienka nerovnosti) dostávame

$$2n \leq 2n+3$$

a odtiaľ po odčítaní výrazu $2n$ pravdivý výrok $0 \leq 3$. Vzhľadom na to, že obe použité úpravy boli ekvivalentné, je pravdivá aj pôvodná nerovnosť. Číslo 2 *je teda dolné ohraničenie danej množiny.*

Teraz dokážeme, že ide o najväčšie dolné ohraničenie. Nech $t > 2$. Ukážeme že takéto číslo nemôže byť dolným ohraničením danej množiny. Na to stačí dokázať, že ku každému takémuto t existuje prvok množiny $\{\frac{2n+3}{n}; n \in N\}$, ktorý je od neho menší. Na to stačí nájsť prirodzené číslo n, pre ktoré bude splnená nerovnosť

$$\frac{2n+3}{n} < t.$$

Po násobení (kladným) číslom n dostávame

$$2n+3 < tn$$

a po odčítaní výrazu $tn+3$ a úprave máme

$$(2-t)n < -3.$$

Obe strany tejto nerovnosti vydelíme výrazom $2-t$, ktorý je záporny, pretože $t > 2$. Dostávame

$$n > -\frac{3}{2-t}.$$

Stačí teda vziať ľubovoľné prirodzené číslo n spĺňajúce túto nerovnosť. Takéto n iste existuje, pretože ku každému reálnemu číslu existuje od neho väčšie prirodzené číslo. Pre takéto n bude splnená ekvivalentná nerovnosť $\frac{2n+3}{n} < t$, čo znamená, že t nie je dolným ohraničením danej množiny.

Niektoré vlastnosti infima množiny sú uvedené v nasledujúcich tvrdeniach.

Propozícia 12 *Nech $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq R$, nech A je zdola ohraničená. Potom* $\inf A \leq \inf B$.

Všimnime si, že ohraničenosť zdola pri množine B nie je nutné v predpokladoch tvrdenia uviesť, pretože tá vyplýva z ohraničenosti zdola jej nadmnožiny A.

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady tvrdenia a nech $\inf A > \inf B$. To znamená, že číslo $\inf A$ nie je dolným ohraničením množiny B. Teda existuje $b_0 \in B$ tak, že $b_0 < \inf A$. Ale pretože $B \subseteq A$, je aj $b_0 \in A$, a teda v množine A sa nachádza prvok menší ako dolné ohraničenie tejto množiny, čo nie je možné. Náš predpoklad $\inf A > \inf B$ bol teda nesprávny, čo znamená, že $\inf A \leq \inf B$. ♣

Propozícia 13 *Nech $A, B \subseteq R$, $A \neq \emptyset \neq B$, nech A je zdola ohraničená a nech pre ľubovoľné $b \in B$ existuje $a \in A$ tak, že $a \leq b$. Potom* $\inf A \leq \inf B$.

Podobne ako v tvrdení 12, ani tu netreba v predpokladoch uvádzať, že B je zdola ohraničená.

Dôkaz. Nech pri splnení predpokladov tvrdenia je $\inf A > \inf B$. To znamená, že $\inf A$ nie je dolné ohraničenie množiny B. Existuje preto $b_0 \in B$ tak, že $b_0 < \inf A$. K tomuto b_0 ale podľa predpokladu existuje $a_0 \in A$ tak, že $a_0 \leq b_0$. Teda $a_0 \leq b_0 < \inf A$, čo je ale v spore s tým, že $\inf A$ je dolné ohraničenie množiny A. ♣

3.3 Supremum množiny

Podobne, ako sme sa v predchádzajúcej časti zaoberali najväčším dolným ohraničením, všimneme si teraz duálny pojem, teda najmenšie horné ohraničenie. Nakoľko mnohé úvahy budú až na smer nerovností rovnaké, budeme postupovať o niečo stručnejšie.

Definícia 13 *Najmenšie horné ohraničenie množiny A sa nazýva supremum tejto množiny a označuje* $\sup A$.

Podobne ako pri infime, aj tu v konkrétnych situáciách obvykle overujeme skutočnosť, že $a_0 = \sup A$ v dvoch krokoch:

- a_0 je horné ohraničenie množiny A, teda pre všetky $a \in A$ je $a \leq a_0$,

- žiadne číslo t menšie ako a_0 už horným ohraničením množiny A nie je, teda pre každé $t < a_0$ existuje $a \in A$ také, že $a > t$.

Tak ako má každá neprázdna zdola ohraničená podmnožina R infimum, má aj každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina R supremum. Kým však pri infime sme jeho existenciu uviedli bez dôkazu ako vlastnosť množiny R, existenciu suprema dokážeme korektným spôsobom.

Propozícia 14 *Každá neprázdna zhora ohraničená podmnožina R má supremum.*

Dôkaz. Nech A je neprázdna zhora ohraničená podmnožina R. Nech B je množina všetkých horných ohraničení množiny A.

Zrejme $B \neq \emptyset$, pretože A je zhora ohraničená, teda má aspoň jedno horné ohraničenie. (Množina B je dokonca nekonečná, to však v tejto súvislosti nie je podstatné.)

Ukážeme, že množina B je aj zdola ohraničená, pričom jej dolným ohraničením je ľubovoľný prvok množiny A. Nech teda $a \in A$. (Taký prvok existuje, pretože A je neprázdna.) Ak by a nebolo dolné ohraničenie množiny B, existovalo by $b \in B$ tak, že $b < a$. To je ale v rozpore s tým, že b je horné ohraničenie množiny A.

Vidíme, že B je neprázdna a zdola ohraničená. Podľa propozície 10 má táto množina infimum. Pre zjednodušenie zápisov označme $c = \inf B$. Ukážeme, že zároveň $c = \sup A$.

V prvom kroku dokážeme, že c je horné ohraničenie množiny A. Ak by totiž nebolo, existovalo by $a \in A$ tak, že $a > c$. Číslo c je ale infimom množiny B, čo znamená, že existuje $b \in B, b < a$. Posledná nerovnosť je ale v rozpore so skutočnosťou, že b je horné ohraničenie množiny A. Teda c je horné ohraničenie množiny A.

Zostáva dokázať, že c je najmenšie horné ohraničenie množiny A. Nech $t < c$. Ak by t bolo horné ohraničenie množiny A, patrilo by do B. Súčasne by bolo menšie ako $c = \inf B$, čo nie je možné.

Tým sme ukázali, že $c = \sup A$. ♣

3.4 Vlastnosti ohraničených množín

Ukážeme si niektoré vlastnosti ohraničených podmnožín R.

Propozícia 15 *Nech $A \subseteq R, A \neq \emptyset$. Potom* $\inf A \leq \sup A$.

Dôkaz. Nech $a \in A$ (vzhľadom na neprázdnosť A aspoň jeden takýto prvok existuje). Na základe definícií infima a suprema je $\inf A \leq a \ \leq \sup A$. ♣

Všimnime si, že ak množina A obsahuje aspoň dva rôzne prvky, tak nerovnosť v predchádzajúcom tvrdení je ostrá, teda $\inf A < \sup A$.

Propozícia 16 *Nech $A, B \subseteq R$, $A \neq \emptyset \neq B$, nech pre ľubovoľné $a \in A, b \in B$ je $a \leq b$. Potom* $\sup A \leq \inf B$.

Pouvažujte, prečo sa v predpokladoch tohoto tvrdenia nič nehovorí o ohraničenosti množín A, B. Porovnajte propozície 13 a 16, nakreslite si v oboch prípadoch príslušné množiny na číselnej osi.

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady tvrdenia a nech $\sup A > \inf B$. Označme $a = \sup A$. Z definície infima a nerovnosti $a > \inf B$ vidíme, že existuje $b_0 \in B$ tak, že $b_0 < a = \sup A$. Z tejto nerovnosti a definície suprema dostávame, že existuje $a_0 \in A$ tak, že $a_0 > b_0$. To je ale v spore s predpokladom tvrdenia, že ľubovoľný prvok množiny A je menší alebo rovnaký ako ľubovoľný prvok množiny B. ♣

Ak by sme v propozícii 16 predpokladali ostrú nerovnosť medzi prvkami množín A, B, aj tak by musela byť nerovnosť medzi $\sup A$ a $\inf B$ neostrá. Príkladom môžu byť množiny $A = (0, 1), B = (1, 2)$.

S úlohami podobným nasledujúcemu cvičeniu sa dá stretnúť v rôznych súvislostiach.

Cvičenie 8 *Nech A, B sú neprázdne ohraničené podmnožiny R. Nech*

$$C = \{a + b; a \in A, b \in B\},$$

teda C obsahuje všetky súčty, kde prvý sčítanec je z množiny A, druhý z množiny B. Potom množina C je neprázdna a ohraničená, pričom

$$\inf C = \inf A + \inf B, \quad \sup C = \sup A + \sup B.$$

Neprázdnosť C priamo vyplýva z neprázdnosti množín A, B. Ak zvolíme ľubovoľné $a_0 \in A, b_0 \in B$, tak $a_0 + b_0 \in C$, čiže $C \neq \emptyset$.

Ak má byť C ohraničená, musí byť ohraničená zdola a zhora. Ukážeme, že je ohraničená zdola, ohraničenosť zhora sa dokáže rovnako.

Množiny A, B sú ohraničené, teda sú aj ohraničené zdola. Nech d_A je ľubovoľné dolné ohraničenie množiny A a nech d_B je ľubovoľné dolné ohraničenie množiny B. Nech c je ľubovoľný prvok množiny C. Potom existujú $a \in A, b \in B$ tak, že $c = a + b$. Ale $a \geq d_A, b \geq d_B$, a teda $c \geq d_A + d_B$ a množina C je zdola ohraničená.

Množina C teda má infimum. Ukážeme, že $\inf C = \inf A + \inf B$*, rovnosť pre supremum sa ukáže podobne.*

Nech $c \in C$. Potom existujú $a \in A, b \in B$ tak, že $c = a + b$. Ale $a \geq \inf A, b \geq \inf B$, a teda $c \geq \inf A + \inf B$. To znamená, že číslo $\inf A + \inf B$ je dolné ohraničenie množiny C, a teda $\inf C \geq \inf A + \inf B$.

Aby sme ukázali, že nastáva rovnosť, musíme vylúčiť nerovnosť $\inf C > \inf A + \inf B$. Predpokladajme, že táto nerovnosť je splnená. Označme

$$\varepsilon = \inf C - (\inf A + \inf B).$$

Podľa nášho predpokladu je $\varepsilon > 0$. Podľa definície infima existujú $a_0 \in A, b_0 \in B$ tak, že

$$a_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}, \quad b_0 < \inf B + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z týchto nerovností dostávame

$$a_0 + b_0 < \inf A + \inf B + \varepsilon = \inf C,$$

čo je ale v spore s tým, že $a_0 + b_0$ je prvok množiny C, a teda nemôže byť menší ako infimum tejto množiny.

3.5 Cvičenia

1. Nech A je ohraničená podmnožina R. Potom existuje $K > 0$ také, že pre všetky $a \in A$ je $|a| < K$. Dokážte.

2. Nech $A = \{\frac{2}{n+1}, n \in N\}$. Nájdite $\inf A$ a $\sup A$.

3. Nech $A = \{\frac{3n^3+n^2+3}{n^3+1}, n \in N\}$. Dokážte, že $\inf A = 3$.

4. Nech $A = \{\frac{5n+8}{n+2}, n \in N\}$. Dokážte, že $\sup A = 5$.

5. Nech $A = \{2x + 1 - x^2, x \in R\}$. Dokážte, že $\sup A = 2$.

6. Nech $A = (0, 1) \cap Q$. Dokážte, že $\inf A = 0, \sup A = 1$.

7. Nájdite $\inf, \sup, \min$ a $\max$ (ak existujú) množín $A = \{4 + (-\frac{2}{n})^n; n \in N\}$, $B = \{\frac{n+3}{2n}; n \in N\}, C = \{5^{-n}; n \in N\}$.

8. Nech $A, B \subseteq R, \emptyset \neq B \subseteq A, A$ je ohraničená. Potom $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$. Dokážte.

9. Nech A, B sú neprázdne zhora ohraničené podmnožiny R, nech ku každému $a \in A$ existuje $b \in B$ je $a \leq b$. Potom $\sup A \leq \sup B$. Dokážte.

10. Nech A, B sú neprázdne zhora ohraničené podmnožiny R. Potom je splnená rovnosť $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$. Dokážte. Sformulujte a dokážte (ak je pravdivé) podobné tvrdenie o prieniku.

11. Nech $A \subseteq R, A \neq \emptyset, A$ je zdola ohraničená. Nech $B = \{x \in R; -x \in A\}$. Potom $\inf A = \sup B$. Dokážte.

12. Nech $A \subseteq (0, 10), A \neq \emptyset, B = \left\{a^2, a \in A\right\}$. Dokážte, že $\sup B = (\sup A)^2$.

13. Nech A je neprázdna zdola ohraničená podmnožina R, nech c je kladné číslo a nech $B = \{ca, a \in A\}$. Potom $\inf B = c \inf A$. Dokážte.

14. Nech A je ohraničená neprázdna podmnožina R, nech $B \subseteq R, B \neq \emptyset$. Nech ku každému $b \in B$ existujú $a_1, a_2 \in A$ tak, že $a_1 \leq b \leq a_2$. Potom $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$. Dokážte.

4 Otvorené a uzavreté množiny

Obsahom tejto časti je skúmanie niektoých vlastností množín reálnych čísel, ktoré súvisia s pojmom vzdialenosti. Takéto vlastnosti sa nazývajú metrické a neskôr sa stretnete aj s ich zovšeobecneniami pre iné štruktúry, akými sú metrické a topologické priestory.

4.1 Okolie bodu

Pojem okolia bude pre ďalšie úvahy podstatný. Skôr ako ho vysvetlíme, doplníme množinu R o dva prvky, ktoré označíme symbolmi $-\infty$ a ∞. Tieto symboly sa niekedy nazývajú nevlastné body množiny R (číselnej osi), na rozdiel od reálnych čísel, ktré sa nazývajú vlastné body množiny R (číselnej osi). Množinu $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ nazývame rozšírenou množinou reálnych čísel. Poznamenajme, že s týmito prvkami nezavádzame žiadne aritmetické operácie, teda nevystupujú v žiadnych sčítaniach, odčítaniach, násobeniach, deleniach a podobne. Zavedieme pre ne iba reláciu usporiadania takýmto spôsobom: Ak $a \in R$, tak $-\infty < a \ < \infty, -\infty < \infty$.

Teraz zavedieme pre prvky množiny R^* pojem okolia, osobitne pre vlastné a nevlastné body.

Definícia 14 *Nech $a \in R, \varepsilon > 0$. Okolie bodu a s polomerom ε je množina $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.*

Okolie bodu ∞ s polomerom ε je množina $O_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$.

Okolie bodu $-\infty$ s polomerom ε je množina $O_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Pojem okolia je intuitívne zrejmý pre vlastné body. Zmysel zlomku $\frac{1}{\varepsilon}$ v okoliach nevlastných bodov vyplynie z nasledujúceho tvrdenia.

Propozícia 17 *Ak $a \in R^*$, tak $O_\alpha(a) \subseteq O_\beta(a)$ práve vtedy, keď $0 < \alpha \leq \beta$.*

Dôkaz tvrdenia je jednoduchým cvičením, ako pre a vlastné, tak nevlastné.

Ak uvážime, že pre $a, b \in R$ číslo $|a-b|$ vyjadruje vzdialenosť medzi bodmi a, b na číselnej osi, tak zápis $x \in O_\varepsilon(a)$ znamená $|x-a| < \varepsilon$.

Nasledujúce tvrdenie budeme viackrát využívať v ďalšom texte.

Propozícia 18 *Nech $a, b \in R^*, a \neq b$. Potom existujú $\alpha, \beta > 0$ tak, že $O_\alpha(a) \cap O_\beta(b) = \emptyset$.*

Dôkaz. Ak $a, b \in \{-\infty, \infty\}$, tak tvrdenie je splnené pre ľuovoľné kladné α, β, nakoľko jedno z týchto okolí obsahuje iba záporné čísla, druhé iba kladné čísla a ich prienik je prázdna množina.

Nech $a \in R, b = \infty$. Ak $a < 0$, tak α môže byť ľubovoľné kladné číslo také, že $\varepsilon < |a|$ a β môže byť ľubovoľné kladné číslo. Potom $O_\alpha(a)$ obsahuje iba záporné čísla, $O_\beta(b)$ obsahuje iba kladné čísla a ich prienik je prázdny. Ak $a \geq 0$, tak vezmeme napríklad $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{a+1}$. Potom $O_\alpha(a) = (a-1, a+1), O_\beta(b) = (a+1, \infty)$ a tieto okolia majú prázdny prienik.

Nech teraz $a, b \in R, a \neq b$. Zvoľme $\alpha = \beta = \frac{|a-b|}{2}$. Zrejme je toto číslo kladné. Potom

$$O_\alpha(a) = (a-\alpha, a+\alpha) = (a - \frac{|a-b|}{2}, a + \frac{|a-b|}{2}),$$

$$O_\beta(b) = (b-\beta, b+\beta) = (b - \frac{|a-b|}{2}, b + \frac{|a-b|}{2}).$$

Ak $a > b$, tak pravý koncový bod $O_\alpha(a)$ je rovnaký ako ľavý koncový bod $O_\beta(b)$, naopak ak $a < b$, tak ľavý koncový bod $O_\alpha(a)$ je rovnaký ako pravý koncový bod $O_\beta(b)$. (Presvedčte sa o tom.) V oboch prípadoch majú tieto množiny prázdny prienik. ♣

Okrem okolí bodov budeme používať aj prstencové okolia definované nasledujúcim spôsobom.

Definícia 15 *Nech $a \in R, \varepsilon > 0$. Prstencové okolie bodu a s polomerom ε je množina $O^o_\varepsilon(a) = O_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$. Prstencové okolia nevlastných bodov sú $O^o_\varepsilon(\infty) = O_\varepsilon(\infty)$ a $O^o_\varepsilon(-\infty) = O_\varepsilon(-\infty)$.*

Zrejme aj pre prstencové okolia sú splnené tvrdenia analogické propozíciám 17 a 18.

4.2 Otvorené množiny

Nech $a, b \in R^*$. Všimnime si otvorený interval (a, b). Ak $c \in (a, b)$, tak existuje okolie $O_\varepsilon(c)$ tak, že $O_\varepsilon(c) \subseteq (a, b)$. Za polomer takéhoto okolia stačí vziať menšie z čísel

$c - a, b - c$. Teda otvorený interval s každým svojím prvkom obsahuje aj nejaké jeho okolie. Takúto vlastnosť napríklad uzavreté intervaly nemajú, nie je možné nájsť okolie bodu $a \in R$, ktoré by bolo podmnožinou intervalu $[a, b]$. Na druhej strane, nielen otvorené intervaly túto vlastnosť majú, má ju aj množina $(1, 2) \cup (3, 4)$, ktorá otvorený interval nie je. Má teda zmysel sformulovať nasledujúcu definíciu.

Definícia 16 *Nech $A \subseteq R$. Množina A je otvorená, ak pre každé $a \in A$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $O_\varepsilon(a) \subseteq A$.*

Z predchádzajúcich úvah vyplýva, že každý otvorený interval je otvorená množina, rovnako aj konečné zjednotenie otvorených intervalov. Jednoduchým cvičením z matematickej logiky je dôkaz, že aj prázdna množina je otvorená, stačí uvážiť, že implikácia s nepravdivým predpokladom je pravdivá.

Nasledujúca veta ukazuje, že v predpoklade konečnosti v úvahe o otvorenosti zjednotenia otvorených intervalov sme boli zbytočne opatrní.

Propozícia 19 *Zjednotenie ľubovoľného systému otvorených množín je otvorená množina.*

Dôkaz. Nech Γ je ľubovoľná množina a nech pre každé $\gamma \in \Gamma$ je A_γ otvorená podmnožina R. Nech $A = \cup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. O tejto množine ukážeme, že je otvorená.

Nech $a \in A$. Potom existuje $\gamma \in \Gamma$ tak, že $a \in A_\gamma$. Množina A_γ je otvorená, preto existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $O_\varepsilon(a) \subseteq A_\gamma$. Nakoľko $A_\gamma \subseteq \cup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = A$, dostávame $O_\varepsilon(a) \subseteq A$ a teda množina A je otvorená. $\clubsuit$

V predchádzajúcom dôkaze stojí za povšimnutie zápis zjednotenia systému množín. Ak by sme ho zapísali ako $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, išlo by o zjednotenie $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup \ldots$, išlo by o zjednotenie spočítateľného systému $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$. Tvrdenie 19 však hovorí o zjednotení ľubovoľného systému množín, množina indexov Γ môže ale nemusí byť spočítateľná.

Po tvrdení o otvorenosti zjednotenia otvorených množín je na mieste podobná otázka pre prienik. Ako uvidíme, tu je potrebný oveľa silnejší predpoklad.

Propozícia 20 *Prienik dvoch otvorených množín je otvorená množina.*

Dôkaz. Nech A, B sú otvorené podmnožiny R. Ak sú disjunktné, ich prienik je prázdna množina, ktorá je otvorená. Nech teda $A \cap B \neq \emptyset$. Nech $c \in A \cap B$. Potom $c \in A$ a súčasne $c \in B$. Obidve tieto množiny sú otvorené, čo znamená, že existujú okolia $O_\alpha(c) \subseteq A, O_\beta(c) \subseteq B$. Nech $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$. Zrejme $\gamma > 0$. Pritom

$O_\gamma(c) \subseteq O_\alpha(c) \subseteq A$, $O_\gamma(c) \subseteq O_\beta(c) \subseteq B$, teda $O_\gamma(c) \subseteq A \cap B$. Tým sme ukázali, že množina $A \cap B$ je otvorená. ♣

Tvrdenie 20 sa matematickou indukciou dá zovšeobecniť na ľubovoľný konečný systém množín. Môžeme teda tvrdiť, že prienik ľubovoľného konečného systému otvorených podmnožín R je otvorená množina.

Predpoklad konečnosti sa tu nedá obísť, ako ukazuje nasledujúce cvičenie.

Cvičenie 9 *Prienik nekonečného systému otvorených množín nemusí byť otvorená množina.*

Nech pre každé $n \in N$ je $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Kazždá z týchto množín je otvorená, ale $\cap_{n-1}^{\infty} A_n = \{0\}$, čo nie je otvorená množina.

4.3 Hromadný bod

Všimnime si množinu $A = \left\{\frac{(-1)^n}{n}; n \in N\right\}$. Ak si jej prvky vyznačíme alebo aspoň predstavíme na číselnej osi, vidím, že nula má k množine A pomerne špeciálny vzťah. V každom okolí nuly existuje prvok množiny A rôzny od nuly. Táto vlastnosť sa dá ešte stručnejšie vyjadriť pomocou pojmu prstencové okolie: v každom prstencovom okolí nuly sa nachádza aspoň jeden prvok množiny A.

Definícia 17 *Nech $A \subseteq R, a \in R$. Bod a je hromadný bod množiny A, ak pre každé $\varepsilon > 0$ je $O^o_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$.*

V zmysle definície je teda v každom prstencovom okolí hromadného bodu množiny aspoň jeden jej prvok. Ako ukazuje nasledujúce tvrdenie, je ich tam dokonca nekonečne veľa.

Propozícia 21 *Nech $A \subseteq R, a \in R$. Ak a je hromadný bod množiny A, tak pre každé $\varepsilon > 0$ je množina $O^o_\varepsilon(a) \cap A$ nekonečná.*

Dôkaz. Predpokladajme že existuje $\varepsilon > 0$, pre ktoré je $O^o_\varepsilon(a) \cap A$ konečná. Označme jej prvky $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Čísla $|a - a_1|, |a - a_2|, \ldots, |a - a_k|$ sú kladné, pretože ide o prvky z prstencového okolia, čiže rôzne od a. Označme najmenšie z nich α. Zrejme $\alpha < \varepsilon$.

Nakoľko a je hromadný bod množiny A, v prstencovom okolí $O^o_\alpha(a)$ sa nachádza aspoň jeden prvok množiny A. Označme tento prvok a_0. Potom ale $a_0 \in O^o_\varepsilon(a)$, čo je v spore s tým, že v tomto prstencovom okolí neexistuje bod množiny A vzdialený menej ako α od a. ♣

Ako sme videli v úvodnom príklade tejto časti, hromadný bod množiny nemusí byť jej prvkom. Že ním byť môže, vidíme na príklade intervalu $(0, 1)$, v ktorom je každý prvok jeho hromadným bodom (a okrem nich aj čísla 0 a 1).

Z tvrdenia 21 tiež vyplýva, že konečná množina nemá žiadne hromadné body. Ak by totiž a bol hromadný bod konečnej množiny A, tak A by musela obsahovať nekonečnú podmnožinu $O^o_\varepsilon(a) \cap A$, čo nie je možné. Teda ak má množina hromadný bod, musí byť nekonečná.

Samotná nekonečnosť množiny ale k existencii jej hromadného bodu nestačí, napríklad množina všetkých celých čísel je nekonečná, ale hromadný bod v R nemá.

Ak by sme však v definícii 17 pripustili $a \in R^*$, teda hromadným bodom množiny by mohol byť aj nevlastný bod, tak množina Z by hromadné body mala, boli by nimi oba nevlastné prvky. Preto sa pri určovaní hromadných bodov treba uistiť, či ide iba o hromadné body v R, alebo či pripúšťame aj nevlastné hromadné body.

4.4 Uzavreté množiny

V predchádzajúcej časti sme videli, že množina nemusí obsahovať (niektoré) svoje hromadné body. Ak ich obsahuje všetky, má isté dôležité vlastnosti, čo je dôvod, pre ktorý je vhodné zaviesť pre takéto množiny osobitný názov.

Definícia 18 *Množina v R je uzavretá, ak obsahuje všetky svoje hromadné body.*

Ukážeme, že uzavretý interval je uzavretá množina.

Cvičenie 10 *Uvažujme o intervale $[0, 1]$. Na základe úvah z predchádzajúcej časti vidíme, že jeho hromadnými bodmi sú všetky jeho prvky. Ukážeme, že okrem nich už tento interval žiadne iné hromadné body nemá.*

Nech $a < 0$. Potom $O^o_{-a}(a) \cap [0, 1] = \emptyset$, a teda a nie je hromadný bod intervalu $[0, 1]$. Podobne ak $a > 1$, tak $O^o_{a-1}(a) \cap [0, 1] = \emptyset$, teda ani takéto a nie je hromadný bod intervalu $[0, 1]$.

To znamená, že interval $[0, 1]$ je uzavretá množina.

V predchádzajúcej časti sme si ukázali, že konečná množina nemôže mať hromadný bod. Ak si podrobnejšie všimneme podmienku uzavretosti v definícii 18, vidíme, že ju môžeme čítať aj takto: Ak je a hromadný bod množiny A, tak $a \in A$. Ak je táto implikácia splnená pre každé $a \in R$, množina A sa nazýva uzavretá množina. Pretože žiadne reálne číslo nie je hromadným bodom konečnej množiny, je predpoklad tejto implikácie pre každé $a \in R$ nepravdivý, a teda implikácia je pre každé $a \in R$ pravdivá. To znamená, že každá konečná množina je uzavretá. Podobnou úvahou sa ukáže, že aj prázdna množina je uzavretá.

Všimnite si, že prázdna množina je súčasne otvorená aj uzavretá, rovnako ako samotná množina R. Naopak napríklad množina $(0, 1]$ nie je ani otvorená ani uzavretá. Vzťah medzi otvorenými a uzavretými množinami objasňuje nasledujúce tvrdenie.

Propozícia 22 *Podmnožina množiny R je uzavretá práve vtedy, keď jej doplnok je otvorená množina.*

Dôkaz. Ide o ekvivalenciu, dokážeme teda obe v nej obsiahnuté implikácie.

Nech $A \subseteq R, A$ je uzavretá. Dokážeme, že množina $R \setminus A$ je otvorená. Nech $x \in R \setminus A$. Nakoľko A je uzavretá, nemôže byť x jej hromadný bod, ak by bol, musela by ho obsahovať. Teda existuje prstencové okolie $O^o_\varepsilon(x)$ s vlastnosťou $O^o_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Ak uvážime že navyše aj $x \notin A$, tak aj $O_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. To ale znamená, že $O_\varepsilon(x) \subseteq R \setminus A$ a teda $R \setminus A$ je otvorená množina.

Naopak nech $A \subseteq R, R \setminus A$ je otvorená. Ukážeme, že A je uzavretá. Nech x je hromadný bod množiny A. Ak by bolo x prvkom $R \setminus A$, tak by existovalo na základe definície 16 jeho okolie $O_\varepsilon(x)$, pre ktoré by bolo $O_\varepsilon(x) \subseteq R \setminus A$. Potom ale $O_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ a tým skôr $O^o_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. To ale znamená, že x nie je hromadný bod množiny A, čo je v spore s naším predpokladom. Teda množina A je uzavretá. ♣

Toto tvrdenie spolu s tvrdeniami 19 a 20 nám poskytujú nasledujúce dôsledky.

Propozícia 23 *Zjednotenie dvoch uzavretých množín je uzavretá množina.*

Propozícia 24 *Prienik ľubovoľného systému uzavretých množín je uzavretá množina.*

Jednou z vlastností neprázdnych uzavretých ohraničených množín je, že obsahujú svoje infimum a supremum, majú teda minimum a maximum. Toto tvrdenie dokážeme pre infimum, dôkaz pre supremum je analogický.

Propozícia 25 *Nech $A \subseteq R, A \neq \emptyset, A$ je uzavretá a zdola ohraničená. Potom* $\inf A \in A$.

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady tvrdenia a nech $\inf A \notin A$. Ak $\varepsilon > 0$, tak existuje $a \in A$ tak, že $a < \inf A + \varepsilon$. Zrejme $\inf A \leq a$, rovnosť ale vzhľadom na predpoklad $\inf A \notin A$ nemôže nastať. Teda $\inf A < a < \inf A + \varepsilon$, čo ale znamená, že $a \in O_\varepsilon^o(\inf A)$ a teda $O_\varepsilon^o(\inf A) \cap A \neq \emptyset$. Túto úvahu môžeme urobiť pre ľubovoľné kladné ε, a teda $\inf A$ je hromadný bod množiny A. Nakoľko A je uzavretá, musí tento hromadný bod byť jej prvkom, čo je ale v spore s naším predpokladom. ♣

4.5 Cvičenia

1. Na základe definície otvorenej množiny dokážte, že doplnok každej konečnej množiny v množine R je otvorená množina.

2. Dokážte, že každá ohraničená otvorená podmnožina R je spočítateľným zjednotením disjunktných otvorených intervalov.

3. Nech $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\} \cup \{0\}$. Dokážte, že A je uzavretá množina.

4. Dokážte, že žiadna neprázdna podmnožina Q nie je v R otvorená ani uzavretá.

5. Dokážte alebo vyvráťte: Ak A je nekonečná zdola ohraničená množina, tak $\inf A$ je jej hromadný bod.

6. Dokážte alebo vyvráťte: Ak c je hromadný bod množín A a B, tak c je hromadný bod množiny $A \cap B$.

7. Dokážte, že množina všetkých hromadných bodov ľubovoľnej podmnožiny R je uzavretá.

8. Nájdite všetky hromadné body množiny $\{(-1)^n + (-\frac{1}{n})^{n+1}; n \in N\}$.

9. Nájdite všetky hromadné body množiny $(0, 1) \cap Q$.

10. Nájdite systém neprázdnych ohraničených uzavretých podmnožín R tak, aby ich zjednotenie bola otvorená množina.

11. Nech $A \subseteq R, A$ obsahuje svoje infimum a supremum. Musí byť potom A uzavretá?

12. Dokážte, že každá uzavretá podmnožina R je prienikom systému otvorených podmnožín R.

5 Postupnosti reálnych čísel

Pojem limity má kľúčové miesto v prechodoch medzi konečnými a nekonečnými množinami. Sú na ňom založené podstatné pojmy matematickej analýzy, akými sú napríklad spojitosť, derivácia alebo integrál. Postupne sa stretnete s limitou v rôznych súvislostiach, avšak z metodologického hľadiska je asi najjednoduchším prípadom limita číselnej postupnosti. Aby sme sa ňou mohli zaoberať, je potrebné mať dobrý prehľad o samotných postupnostiach.

5.1 Postupnosť

V časti 2.2 sme sa zaoberali zobrazeniami medzi ľubovoľnými množinami. Teraz si všimneme iba jeden špeciálny prípad, a to ten, keď množinou vzorov bude N, teda množina všetkých prirodzených čísel.

Definícia 19 *Zobrazenie $f : N \to A$ sa nazýva postupnosť prvkov množiny A.*

Jednoduché príklady postupností sú v nasledujúcich cvičeniach.

Cvičenie 11 *Nech $A = \{x, y\}$, nech postupnosť $f : N \to A$ je daná predpisom $f(2k) = y, f(2k-1) = x, k \in N$. Teda každému nepárnemu prirodzenému číslu priradíme písmeno x, každému párnemu prirodzenému číslu priradíme písmeno y. Čiže $f(1) = x, f(2) = y, f(3) = x, f(4) = y$ a tak ďalej.*

Cvičenie 12 *Nech P je množina všetkých prvočísel, nech $f : N \to P$ je zobrazenie, ktoré prirodzenému číslu n priradí n-té najmenšie prvočíslo. Teda $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 7, f(5) = 11, \dots$*

Cvičenie 13 *Ak hádžeme kockou a zapisujeme si čísla, ktoré padli, dostávame tak postupnosť čísel z množiny $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. (Tento príklad je značne nerealistický, pretože v ňom predpokladáme nekonečný počet hodov, v skutočnosti aj tí najtrpezlivejší vrhači kociek nevytvoria postupnosť, ale iba zobrazenie $f : \{1, 2, \dots, n\} \to K$, ktoré môžeme reprezentovať usporiadanou n-ticou.)*

Všimnime si predchádzajúce cvičenia z viacerých hľadísk.

Aj keď sa často budeme zaoberať prípadom, kedy množina A z definície 19 bude podmnožinou R, teda postupnosťami reálnych čísel, cvičenie 11 ukazuje, že to tak byť nemusí (a ani nebude, napríklad v časti 6.4 sa budeme zaoberať istou postupnosťou intervalov).

Cvičenie 13 zasa ukazuje nesprávnosť predpokladu, že jednotlivé prvky postupnosti musia podliehať určitému pravidlu.

Zápis postupnosti je možné výrazne zjednodušiť. Ak vieme, že hovoríme o postupnosti, stačí uviesť jej hodnoty, pretože vzor je daný poradím, v ktorom je príslušná hodnota napísaná. Tak napríklad začiatok postupnosti z cvičenia 12 je možné zapísať takto: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$. Nakoľko napríklad číslo 19 je ôsme v poradí, nie je potrebné písať $f(8) = 19$.

Spomenieme ešte dve zaužívané konvencie. Kým zobrazenia vo všeobecnosti zvykneme označovať písmenami $f, g, h, \ldots$, pri postupnostiach, ako špeciálnych prípadoch zobrazení, často používame označenia $a, b, c, \ldots$ a namiesto zápisov hodnôt postupnosti $a(1), a(2), a(3), \ldots, a(n)$, teda premenných v zátvorke, píšeme $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, teda premenné v dolnom indexe. Samotná postupnosť sa obvykle označuje symbolom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Teda napríklad b_{23} je dvadsiaty tretí člen postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Postupnosť môže byť zadaná rôznymi spôsobmi. Pomerne často sa stretávame s predpisom, ktorý hovorí, ako vyzerá n-tý člen postupnosti, ako napríklad v cvičení 11. V takom prípade často v zápise postupnosti nahrádzame a_n príslušným predpisom, takže môžeme napríklad hovoriť o postupnosti $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Taktiež je možné členy postupnosti slovne popísať, ako napríklad v cvičeniach 12 a 13.

Iným spôsobom, akým môže byť postupnosť zadaná, je rekurentný vzťah, prípadne vzťahy. Ide o návod na vyjadrenie člena postupnosti pomocou predchádzajúcich. Tak napríklad vzťahy $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pre $n \in N$ určujú známu Fibonacciho postupnosť.

Na zadanie postupnosti ale určite nestačí vymenovať niekoľko jej členov. Tak napríklad, v postupnosti, kde prvých šesť členov je $2, 4, 6, 8, 10, 12$ sa o siedmom a ďalších členoch nedá povedať vôbec nič. Môže ním byť číslo $-\frac{\pi}{5}$ a všetky ostatné členy môžu byť nulové, prípadne akokoľvek inak. Teda všetky úlohy populárnych časopisov typu "doplňte ďalší člen postupnosti" sú nekorektné a vo vyučovaní matematiky nemajú miesto.

V niektorých zdrojoch sa tiež dá nájsť pojem "konečná postupnosť". Nič také nebudeme používať, nakoľko pojem usporiadanej n-tice je zrejme čitateľovi známy a nie je treba pre ňu zavádzať nové označenie. Počet prvkov postupnosti je teda vždy nekonečný.

Ak sa vrátime k definícii spočítateľnej množiny (definícia 8), vidíme že spočítateľnú množinu môžeme charakterizovať tým, že existuje postupnosť všetkých jej prvkov. Táto postupnosť je potom bijektívnym zobrazením medzi množinou N a danou množinou.

Je dôležité rozlišovať medzi postupnosťou a množinou jej všetkých členov. Kým postupnosť je vždy nekonečná, postupnosť jej členov môže byť konečná, ako napríklad v cvičení 11, kde je množina všetkých členov postupnosti dvojprvková. Podobne napríklad postupnosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ sú rôzne (dokonca sa líšia v každom člene), ale obe majú rovnakú množinu všetkých svojich hodnôt, a to množinu $\{-1, 1\}$.

Niektoré postupnosti majú špeciálne vlastnosti. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktorú existuje $d \in R$ tak, že pre všetky $n \in N$ je $a_{n+1} = a_n + d$ sa nazýva aritmetická postupnosť. Číslo d je diferencia tejto postupnosti. Ak v takejto postupnosti je $d = 0$, postupnosť sa nazýva konštantná. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktorú existuje $q \in R$ tak, že pre všetky $n \in N$ je $a_{n+1} = qa_n$ sa nazýva geometrická postupnosť. Číslo q je kvocient tejto postupnosti.

Názvy aritmetickej a geometrickej postupnosti súvisia s tým, že v aritmetickej postupnosti je každý jej člen (okrem prvého) aritmetickým priemerom predchádzajúceho a nasledujúceho člena, kým v geometrickej postupnosti je tento člen geometrickým priemerom predchádzajúceho a nasledujúceho člena.

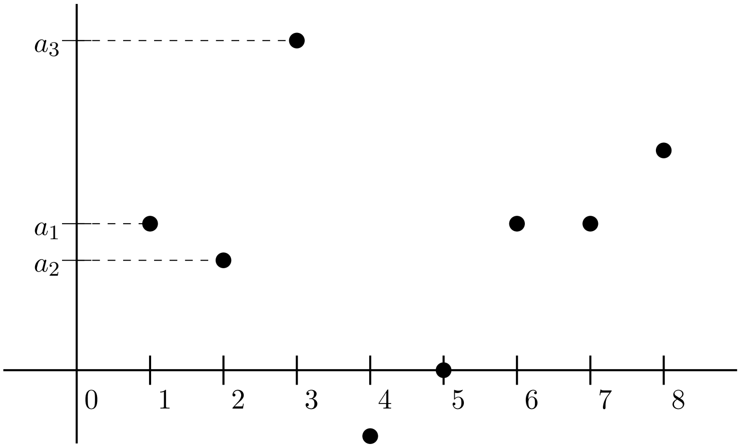
V ďalších častiach uvidíme, že pri práci s postupnosťami na konečných počtoch ich členov príliš nezáleží. (Táto veta znie pomerne zmätočne, čoskoro sa však objasní.) Preto môžeme definíciu 19 preformulovať o niečo voľnejšie a za postupnosť prvkov množiny A považovať aj zobrazene z množiny $N \setminus K$ do množiny A, kde K je ľubovoľná konečná podmnožina množiny N. Teda môžeme hovoriť o postupnosti $\left\{\frac{1}{(n-2)(n-5)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ aj napriek tomu, že jej druhý a piaty člen neexistujú, v tomto prípade $K = \{2, 5\}$.

Pokiaľ ide o grafické zobrazovanie postupností, podľa okolností sa môžeme rozhodnúť pre jednu z nasledujúcich možností. V prvom rade je možné použiť obvyklý spôsob znázorňovania zobrazení z R do R, teda v rovine, ako je to na obrázku 5.1. Iným spôsobom je znázornenie hodnôt postupnosti na číselnej osi tak, ako na obrázku 5.2. Tu je ale nevyhnutné jednotlivé body označiť, aby bolo zrejmé ich poradie.

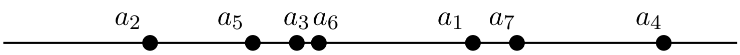
Na obrázkoch je možné vyznačiť iba konečný počet hodnôt postupnosti a ako obvykle, ani tu nemožno obrázkom argumentovať pri dôkazoch. Napriek tomu nám môže obrázok poskytnúť istú predstavu o vlastnostiach skúmanej postupnosti.

Niektoré postupnosti sa vyznačujú istými vlastnosťami, ktoré popíšeme vo zvyšku tejto časti. Nakoľko postupnosť je špeciálnym prípadom zobrazenia, pôjde o vlastnosti zobrazení, rozdiel je iba v inom zápise.

Dôležitou vlastnosťou zobrazení, a teda aj postupností, je monotónnosť. Jej rôzne typy zhrnieme v nasledujúcej definícii.



Obr. 5.1: Postupnosť znázornená v rovine



Obr. 5.2: Postupnosť znázornená na priamke

Definícia 20 *Postupnosť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je*

- *rastúca, ak pre všetky* $m, n \in N$ *také, že* $m < n$ *je* $a_m \leq a_n$,
- *rýdzo rastúca, ak pre všetky* $m, n \in N$ *také, že* $m < n$ *je* $a_m < a_n$,
- *klesajúca, ak pre všetky* $m, n \in N$ *také, že* $m < n$ *je* $a_m \geq a_n$,
- *rýdzo klesajúca, ak pre všetky* $m, n \in N$ *také, že* $m < n$ *je* $a_m > a_n$,

Ak má postupnosť ktorúkoľvek z uvedených vlastností, je monotónna.

Z definície je vidieť, že každá rýdzo rastúca postupnosť je aj rastúca, podobne každá rýdzo klesajúca postupnosť je klesajúca.

V niektorých zdrojoch je možné nájsť aj mierne odlišnú terminológiu – rastúce postupnosti (v zmysle definície 20) sa nazývajú neklesajúce a rýdzo rastúce sa nazývajú rastúce. Podobne sa namiesto označenia klesajúca postupnosť môžete stretnúť aj s pojmom nerastúca postupnosť. Označenie použité v definícii 20 je však logicky konzistentné. Logika prirodzeného jazyka totiž hovorí, že neklesajúca postupnosť by mala byť každá postupnosť, ktorá nie je klesajúca, teda môže ísť aj o postupnosť, ktorá nie je monotónna. Preto sa v ďalšom budeme pridržiavať terminológie zavedenej v definícii 20.

Pri overovaní monotónnosti pre konkrétne postupnosti spravidla využijeme nasledujúce tvrdenie (tu je sformulované pre rastúce postupnosti, analogické tvrdenia sú však pravdivé aj pre ostatné verzie monotónnosti).

Propozícia 26 *Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca práve vtedy, keď je pre každé $n \in N$ splnené $a_n \leq a_{n+1}$.*

Dôkaz tohoto tvrdenia (a zvyšných troch pre zostávajúce typy monotónnosti) je jednoduchým cvičením. Pri zisťovaní monotónnosti postupnosti teda stačí porovnať dva po sebe idúce jej členy. Pochopiteľne však musí ísť o ľubovoľné dva po sebe idúce členy, nie iba niektoré dvojice.

Dôležitou vlastnosťou postupnosti je jej ohraničenosť.

Definícia 21 *Postupnosť je zdola (zhora) ohraničená, ak je zdola (zhora) ohraničená množina jej všetkých hodnôt. Postupnosť je ohraničená, ak je ohraničená zdola aj zhora.*

5.2 Podpostupnosti

Uvažujme teraz o postupnosti všetkých párnych prirodzených čísel, teda o postupnosti $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$. Z tejto postupnosti vyberieme čísla deliteľné ôsmimi, čím dostaneme postupnosť $\{8n\}_{n=1}^{\infty}$. Táto sa nazýva podpostupnosť postupnosti $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$, alebo tiež jej vybraná postupnosť. Pokúsme sa teraz uvedený postup formalizovať.

Ak máme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jej podpostupnosť $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ musí spĺňať dve podmienky:

- Každé b_k sa musí rovnať niektorému a_n.
- Ak $b_k = a_n$, tak $b_{k+1} \in \{a_m; m > n\}$.

Prvá podmienka je zrejmá, v podpostupnosti sa nemôže objaviť člen, ktorý nebol v pôvodnej postupnosti. Množina všetkých hodnôt podpostupnosti je teda podmnožinou množiny všetkých hodnôt pôvodnej postupnosti.

Pokiaľ ide o druhú podmienku, táto hovorí, že poradie prvkov v podpostupnosti musí byť rovnaké ako v pôvodnej postupnosti. Ak teda z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyberieme do podpostupnosti ako prvé tri prvky čísla a_5, a_8, a_{17}, tak štvrtý prvok podpostupnosti už môžeme vyberať iba z prvkov a_n s indexom aspoň 18. Voľne povedané, v podpostupnosti sa nemôžeme vracať. Tak napríklad postupnosť $\{8n\}_{n=1}^{\infty} = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, \dots\}$ je podpostupnosťou postupnosti $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$, kým napríklad postupnosť $\{16, 8, 24, 32, 40, 48, \dots\}$ jej podpostupnosťou nie je.

Vybrať podpostupnosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ teda znamená vybrať príslušné indexy označujúce tieto členy. V prípade postupnosti $\{8n\}_{n=1}^{\infty}$ ako podpostupnosti postupnosti

$\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ sme vyberali indexy $4, 8, 12, \ldots$, pretože prvý člen podpostupnosti je štvrtým členom pôvodnej postupnosti, druhý člen podpostupnosti je ôsmym členom pôvodnej postupnosti a tak ďalej. Tieto úvahy opodstatňujú nasledujúcu definíciu.

Definícia 22 *Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť a nech $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rýdzo rastúca postupnosť prirodzených čísel. Potom $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je podpostupnosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Podpostupnosti zachovávajú mnohé vlastnosti postupností, z ktorých sú vybrané. Napríklad každá podpostupnosť monotónnej postupnosti je (rovnako) monotónna, podobne každá podpostupnosť ohraničenej postupnosti je ohraničená.

5.3 Cvičenia

1. Odvoďte vzťah pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti.
2. Odvoďte vzťah pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti.
3. Nech $a_n = n + 2$. Nájdite súčet prvých 100 členov tejto postupnosti.
4. Nech $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + 1$. Nájdite súčet prvých 100 členov tejto postupnosti.
5. Nech v aritmetickej postupnosti je $a_{10} = 34, a_{13} = 43$. Nájdite súčet prvých 100 členov tejto postupnosti.
6. Nech v geometrickej postupnosti je $a_7 = 2, a_9 = \frac{1}{2}$. Nájdite súčet prvých 100 členov tejto postupnosti.
7. Nech $a_n = 2^n + n + 1$. Nájdite súčet prvých 100 členov tejto postupnosti.
8. Nech $a_n = \frac{2n^2+5}{n^2+1}$. Dokážte, že táto postupnosť je klesajúca.
9. Dokážte, že súčet monotónnych postupností rovnakého typu je monotónna postupnosť toho istého typu.
10. Zistite typ monotónnosti súčtu rastúcej a rýdzo rastúcej postupnosti.
11. Aký môže byť typ monotónnosti súčtu rastúcej a klesajúcej postupnosti?
12. Dokážte, že každá podpostupnosť ohraničenej postupnosti je ohraničená.
13. Nájdite postupnosť, ktorá má nekonečný počet navzájom rôznych konštantných podpostupností.
14. Dokážte, že každá postupnosť je súčtom dvoch monotónnych postupností.

6 Limita postupnosti

Všimnime si postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Aj keď nula nie je jej členom, má v tejto postupnosti istú významnú úlohu. Voľne povedané, čím je n väčšie, tým sú členy postupnosti bližšie k nule.

6.1 Definícia limity

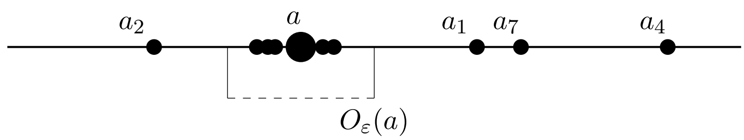
Voľnosť tejto formulácie je ale príliš veľká, rovnaké tvrdenie sa totiž dá vysloviť aj o čísle -2. Na to, aby sme presnejšie vyjadrili tú vlastnosť, ktorú číslo 0 voči tejto postupnosti má (a číslo -2 nemá), použijeme terminológiu okolia bodu. Ak totiž uvážime okolie $O_1(-2)$ (teda interval $(-3,-1)$), vidíme, že v tomto okolí sa nenachádza nijaký bod postupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Okolie s rovnakou vlastnosťou by sme našli aj napríklad k číslam $-5,3$ alebo $-\frac{1}{4}$, tu by sme ale museli vziať menší polomer.

Je teda hľadanou význačnou vlastnosťou nuly tá skutočnosť, že v každom jej okolí sa nachádza aspoň jeden prvok postupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$? Takúto vlastnosť ale má aj číslo $\frac{1}{2}$, v každom jeho okolí sa nachádza aspoň jeden prvok postupnosti, konkrétne ono samo. Pritom ale číslo $\frac{1}{2}$ nemá tú pozoruhodnú vlastnosť, ktorú sa snažíme popísať pri nule.

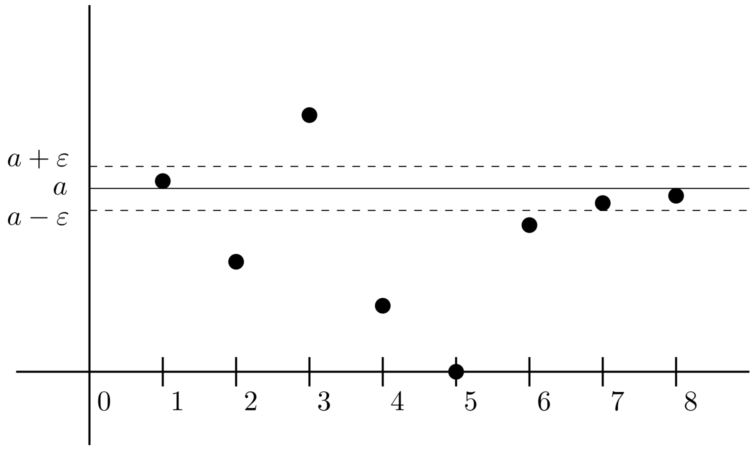
Všimnime si ale počet prvkov, ktoré nebudú v okolí skúmaného bodu, ale mimo neho. Podotýkame, že hovoríme o členoch postupnosti, nie o jej hodnotách, tak napríklad postupnosť, v ktorej pre každé $n \in N$ je $a_n = 2$ má síce iba jednu hodnotu, ale nekonečný počet členov.

Ak teda opäť uvažujeme o postupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, tak vidíme, že ak $a < 0$, tak je možné zvoliť si také (dostatočne malé) okolie $O_\varepsilon(a)$, že mimo neho bude nekonečný počet prvkov postupnosti. To isté sa dá povedať aj o číslach a, pre ktoré $a > 0$ (urobte túto úvahu podrobne).

Nula ale túto vlastnosť nemá. Vezmime ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Zistíme, ktoré body postupnosti sú mimo množiny $O_\varepsilon(0)$. Nakoľko všetky členy skúmanej postupnosti sú kladné, ide o tie z nich, pre ktoré je $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$. Táto nerovnosť je ale ekvivalentná s nerovnosťou $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Nech je číslo ε akékoľvek kladné číslo, zlomok $\frac{1}{\varepsilon}$ je kladné reálne číslo, a teda existuje iba konečne veľa prirodzených čísel od neho menších alebo rovnajúcich sa mu. (Všimnite si, že tu využívame Archimedovu vlastnosť množiny R uvedenú v závere časti 2.1.)



Obr. 6.1: Limita postupnosti – priamka



Obr. 6.2: Limita postupnosti – rovina

Teda iba konečný počet členov postupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je mimo okolia $O_\varepsilon(0)$. Inými slovami, až na konečný počet ležia všetky členy postupnosti v tomto okolí. Ešte inak – od istého člena už všetky sú v tomto okolí. Toto je vlastnosť, ktorá nás oprávňuje vysloviť nasledujúcu definíciu.

Definícia 23 *Nech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel, nech* $a \in R$. *Ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje konečná množina* $K \subseteq N$ *tak, že pre každé* $n \in N \setminus K$ *je* $a_n \in O_\varepsilon(a)$, *tak* a *je limita postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definíciu 23 ilustruje obrázok 6.1. Až na konečný počet prvkov (v tomto prípade štyri) všetky členy postupnosti ležia vo vopred zvolenom okolí $O_\varepsilon(a)$.

Tá istá situácia pre zobrazenie postupnosti v rovine je na obrázku 6.2. Predpokladáme, že až na konečný počet bodov ležia všetky v páse ohraničenom čiarkovanými polpriamkami.

Ak uvážime, že konečná množina K z definície 23 má maximum, vidíme, že všetky prvky postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s indexom väčším ako toto maximum už ležia v okolí $O_\varepsilon(a)$. Z tejto úvahy vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Propozícia 27 *Číslo a je limitou postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *práve vtedy, ak ku každému* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in N$ *tak, že pre všetky* $n \geq n_0$ *je* $a_n \in O_\varepsilon(a)$.

Za n_0 stačí vziať ľubovoľné číslo väčšie ako maximum množiny K. Podmienku $a_n \in O_\varepsilon(a)$ môžeme zapísať aj v tvare $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ alebo tiež $|a_n - a| < \varepsilon$.

Tu zároveň vidíme, že existencia, ako aj hodnota limity postupnosti nezávisia na konečnom počte jej členov. Presnejšie sa toto pozorovanie dá sformulovať nasledujúcim spôsobom.

Propozícia 28 *Nech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sú postupnosti, pre ktoré existuje* $n_0 \in N$ *tak, že pre všetky* $n \in N, n \geq n_0$ *je* $a_n = b_n$. *Potom* $a \in R$ *je limitou postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *práve vtedy, ak je aj limitou postupnosti* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Toto tvrdenie je priamym dôsledkom propozície 27. Na jeho základe je možné zameniť v postupnosti ľubovoľný konečný počet jej členov za iné hodnoty, pričom na existencii a hodnote limity sa nič nezmení.

Predtým, ako limitu postupnosti označíme nejakým symbolom, musíme dokázať že žiadna postupnosť nemôže mať viac ako jednu limitu. Dôvody sú uvedené v texte za definíciou 9.

Propozícia 29 *Každá postupnosť má najviac jednu limitu.*

Dôkaz. Ukážeme, že žiadna postupnosť nemôže mať dve rôzne limity. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť a nech $b, c \in R, b \neq c$. Predpokladajme, že obe tieto čísla sú limitami danej postupnosti. Zvoľme okolia $O_\varepsilon(b), O_\varepsilon(c)$ tak, aby boli disjunktné, teda aby bolo $O_\varepsilon(b) \cap O_\varepsilon(c) = \emptyset$. Takéto okolia určite existujú, stačí vziať $\varepsilon \leq \frac{1}{2}|b - c|$.

V zmysle definície 23 je množina tých členov postupnosti, ktoré nepatria do $O_\varepsilon(b)$ konečná, podobne aj tých, ktoré nepatria do $O_\varepsilon(c)$. To ale znamená, že aj ich zjednotenie, teda množina všetkých členov postupnosti, ktoré nepatria do aspoň jedného z týchto okolí, je konečná.

Nakoľko $O_\varepsilon(b) \cap O_\varepsilon(c) = \emptyset$, každý prvok postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ do aspoň jedného z týchto okolí nepatrí. V predchádzajúcom odstavci sme ale ukázali, že takých prvkov postupnosti môže byť iba konečný počet. Predpoklad o existencii dvoch rôznych limít bol teda nesprávny. ♣

Teraz už teda môžeme zaviesť označenie pre limitu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Skutočnosť, že číslo a je limitou tejto postupnosti, označujeme zápisom $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Niekedy sa môžeme stretnúť aj so zápisom $a_n \to a$.

Definícia 24 *Postupnosť, ktorá má limitu, sa nazýva konvergentná.*

Príkladom konvergentnej postupnosti je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá bola motiváciou pre úvahy v tejto časti. Podobne sa ľahko ukáže, že aj každá konštantná postupnosť je konvergentná.

Niekedy sa na popis skutočnosti $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ používa formulácia "postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k a". Takéto a podobné slovné spojenia by nemali pri uvažovaní o postupnostiach zvádzať k rôznym vágnym predstavám akéhosi "blíženia sa". Je dobré uvedomiť si, že sloveso blížiť sa je spojené s pohybom, avšak postupnosť je zobrazenie, ktoré sa celkom iste pohybovať nemôže.

6.2 Vlastnosti konvergentných postupností

Pri určovaní limity postupnosti často využívame skutočnosť, že skúmanú postupnosť je možné rozložiť na jednoduchšie postupnosti, ktorých limity poznáme. V tejto časti uvedieme tvrdenia užitočné pri podobných postupoch.

Začneme pomerne zrejmým ale dôležitým tvrdením o konvergencii podpostupnosti. Hovorí o tom, že každá podpostupnosť konvergentnej postupnosti je tiež konvergentná, a to k tej istej limite.

Propozícia 30 *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *nech* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je podpostupnosť postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Potom* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady tvrdenia. Ukážeme, že a je limitou postupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Nech $\varepsilon > 0$. Nakoľko $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, podľa tvrdenia 27 od istého indexu n_0 všetky členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ patria do $O_\varepsilon(a)$. Keďže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rýdzo rastúca postupnosť prirodzených čísel, niektorý jej člen musí byť väčší ako n_0. Nech ide o člen s indexom k_0. Potom $a_{n_{k_0}} \in O_\varepsilon(a)$, pretože $n_{k_0} > n_0$. Všetky členy podpostupnosti s indexom väčším ako k_0 sú zároveň aj členmi postupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s indexom väčším ako n_0 (opäť využívame, že $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rýdzo rastúca), a teda patria do $O_\varepsilon(a)$. To znamená, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. ♣

Z práve dokázaného tvrdenia vyplýva, že ak postupnosť obsahuje dve podpostupnosti s rôznymi limitami, nemôže byť konvergentná. Toto je jednoduchý spôsob, ako ukázať, že postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je konvergentná.

Propozícia 31 *Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.*

Dôkaz. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť, nech $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Zvoľme okolie $O_1(a)$. Podľa definície 23 množina tých n, pre ktoré $a_n \notin O_1(a)$, je konečná. Nech m je jej minimum a nech M je jej maximum. Ukážeme, že číslo $\min\{m, a-1\}$ je dolné ohraničenie postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Nech $n \in N$. Ak $a_n \in O_1(a)$, tak $a_n > a - 1$. Ak a_n v tomto okolí neleží, tak $a_n \geq m$. V každom prípade je ale $a_n \geq \min\{m, a-1\}$.

Podobne sa ukáže že číslo $\max\{M, a+1\}$ je horné ohraničenie postupnosti. ♣

Tvrdenie sa očividne nedá obrátiť, napríklad postupnosť $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená, ale nie je konvergentná.

Nasledujúce tvrdenie hovorí o limite súčinu ohraničenej postupnosti a postupnosti s nulovou limitou.

Propozícia 32 *Nech* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená postupnosť, nech* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Dôkaz. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť a nech $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Nech K je kladné číslo také, že pre všetky $n \in N$ je $|a_n| < K$ (cvičenie 1 v časti 3.5). Nech $\varepsilon > 0$. Potom tiež $\frac{\varepsilon}{K} > 0$. Podľa vety 27 k tomuto číslu existuje $n_0 \in N$ tak, že pre všetky $n \in N, n \geq n_0$ je $|b_n - 0| = |b_n| < \frac{\varepsilon}{K}$.

Nech $n \in N, n \geq n_0$. Potom $|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. To znamená, že $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. ♣

Cvičenie 14 *Z predchádzajúceho tvrdenia vidíme, že* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, *pretože postupnosť* $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ *je ohraničená a* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

V ďalších tvrdeniach sa budeme zaoberať limitami postupností, ktoré sú vytvorené pomocou aritmetických operácií s postupnosťami.

Propozícia 33 *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Potom* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady tvrdenia. Ukážeme, že $a + b$ je limitou postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nech $\varepsilon > 0$.

Nakoľko $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, existuje k čislu $\frac{\varepsilon}{2}$ číslo $n_1 \in N$ také, že pre všetky $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Podobne existuje číslo $n_2 \in N$ také, že pre všetky $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Označme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Pre každé $n \geq n_0$ sú splnené obe uvedené nerovnosti, a teda pre všetky $n \geq n_0$ je

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

čo znamená, že $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$. ♣

Všimnime, si, že tu o postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvrdíme dve veci – táto postupnosť je konvergentná a jej limita je $a + b$.

Je pomerne nebezpečné pamätať si predchádzajúce tvrdenie bez jeho predpokladov, teda v tvare $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$. Táto rovnosť je splnená iba ak existujú limity na jej pravej strane. Z ich existencie už potom vyplýva existencia $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$, ako sme práve dokázali. Z existencie limity na ľavej strane ale existencia limít $\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$ nevyplýva. Príkladom môžu byť postupnosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$. Ich súčtom je konštantná, a teda konvergentná postupnosť, ale ani jedna z týchto postupností konvergentná nie je.

Propozícia 34 *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, c \in R$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$.

Dôkaz. Ak $c = 0$, tvrdenie je zrejmé. Predpokladajme teda, že $c \neq 0$.

Nech $\varepsilon > 0$. Nakoľko $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, k číslu $\frac{\varepsilon}{|c|}$ existuje $n_0 \in N$ tak, že pre všetky $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Pre takéto n je potom $|ca_n - ca| = |c||a_n - a| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$, čo znamená, že $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$. ♣

Postupnosťou súčinov sa zaoberá nasledujúce tvrdenie.

Propozícia 35 *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

Dôkaz. Ak aspoň jedno z čísel a, b je nula, tvrdenie vyplýva z propozície 32, stačí si uvedomiť, že konvergentná postupnosť je ohraničená (propozícia 31). Predpokladajme teda, že $a \neq 0 \neq b$.

Aby sme dokázali, že $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$, je treba ukázať, že pre ľubovoľné kladné ε je od istého indexu splnená nerovnosť $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$. Návod nám poskytne umelý, ale často používaný krok

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)|.$$

Nech teda $\varepsilon > 0$. Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, a teda ohraničená. Nech $K \in R$ je také, že pre každé $n \in N$ je $|b_n| < K$.

Z predpokladu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ vidíme, že pre číslo $\frac{\varepsilon}{2K}$ existuje $n_1 \in N$ také, že pre všetky $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$.

Podobne z predpokladu $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ dostávame, že k číslu $\frac{\varepsilon}{2|a|}$ existuje $n_2 \in N$ také, že pre všetky $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$.

Pre ľubovoľné $n \in N, n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ je teda

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)| =$$
$$= |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K}K + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To znamená, že $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$. ♣

Poznámky uvedené za tvrdením 33 sa vzťahujú aj na tento prípad.

Pri určovaní limity podielov sa často využíva nasledujúce tvrdenie.

Propozícia 36 *Nech* $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme najprv pre prípad $b > 0$. Potom zrejme aj $\frac{b}{2}$ je kladné číslo, a teda existuje $n_1 \in N$ tak, že pre všetky $n \in N, n \geq n_1$ je $b_n \in O_{\frac{b}{2}}(b)$ a teda $b_n > \frac{b}{2}$.

Nech $\varepsilon > 0$. Pretože $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, existuje k číslu $\frac{b^2\varepsilon}{2}$ prirodzené číslo n_2 tak, že pre všetky $n \geq n_2$ je $|b_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}$.

Označme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pre všetky $n \in N, n \geq n_0$ je

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right| = \frac{|b_n - b|}{b_n b} < \frac{2}{b^2}|b_n - b| < \frac{2}{b^2}\frac{b^2\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a teda $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$.

Ak $b < 0$, tak podľa tvrdenia 34 je $\lim_{n\to\infty}(-b_n) = -b$, pričom $-b$ je kladné. Podľa prvej časti tohoto dôkazu je potom $\lim_{n\to\infty}(-\frac{1}{b_n}) = -\frac{1}{b}$ a opäť podľa tvrdenia 34 je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. ♣

V predpokladoch tvrdenia 36 zdanlivo chýba podmienka $b_n \neq 0$ pre všetky $n \in N$. Nulových členov ale môže byť v takejto postupnosti iba konečný počet (cvičenie 6 v tejto časti) a ak tieto členy zameníme za nenulové, vzhľadom na definíciu limity postupnosti sa ani konvergencia ani hodnota limity nezmení.

Z tvrdení 35 a 36 vyplýva nasledujúca propozícia.

Propozícia 37 *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$. *Potom* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Doteraz dokázané tvrdenia umožňujú hľadať limity postupností tvaru $\left\{\frac{P(n)}{Q(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, kde P, Q sú polynomické funkcie, pričom stupeň funkcie v čitateli je rovnaký alebo nižší ako stupeň funkcie v menovateli. Postup je zrejmý z nasledujúceho cvičenia.

Cvičenie 15 *Nájdeme limitu postupnosti* $\left\{\frac{2n^2+n-3}{4n^2-5n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. *Členy postupnosti upravíme nasledujúcim spôsobom:*

$$\frac{2n^2+n-3}{4n^2-5n+1} = \frac{n^2(2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2})}{n^2(4-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{4-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

Priamo z definície limity sme už ukázali, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. *Použitím tvrdení dokázaných v tejto časti dostávame* $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{n^2}\right) = -3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = -3.0.0 = 0$, *podobne aj pre postupnosti v menovateli. Po použití tvrdenia o postupnosti podielov vidíme, že limita danej postupnosti je* $\frac{1}{2}$.

Zostávajúci prípad, teda ak stupeň funkcie v čitateli je vyšší ako stupeň funkcie v menovateli, bude objasnený v časti 6.3.

Nasledujúce tvrdenie sa zaoberá jedným z typov limitných prechodov, pri ktorom sa nerovnosť medzi členmi postupnosti prenesie na rovnakú nerovnosť medzi ich limitami.

Propozícia 38 *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, *pričom pre všetky* $n \in N$ *je* $a_n \le b_n$. *Potom* $a \le b$.

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady tvrdenia a nech $a > b$. Nech $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Potom zrejme $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \emptyset$. Vzhľadom na to, že $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, existuje $n_1 \in N$ tak, že pre všetky $n \ge n_1$ je $a_n \in O_\varepsilon(a)$ a existuje $n_2 \in N$ tak, že pre všetky $n \ge n_2$ je $b_n \in O_\varepsilon(b)$.

Označme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potom pre všetky $n \ge n_0$ je $a_n \in O_\varepsilon(a), b_n \in O_\varepsilon(b)$. Teda pre takéto n je $b_n < b+\varepsilon = a-\varepsilon < a_n$, čo je ale v rozpore s predpokladom $a_n \le b_n$. To znamená, že $a \le b$. ♣

Na základe tvrdenia 28 je možné predpoklady propozície 38 mierne zoslabiť. Splnenie nerovnosti $a_n \le b_n$ nie je potrebné požadovať pre všetky $n \in N$, ale stačí, ak bude táto nerovnosť splnená pre všetky $n \in N \setminus K$, kde K je konečná podmnožina N.

Ak by pre konvergentné postupnosti $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$ bola pre všetky $n \in N$ splnená ostrá nerovnosť $a_n < b_n$, môžeme si položiť otázku, či táto ostrá nerovnosť zaručí aj ostrú nerovnosť medzi limitami. Odpoveď je záporná (cvičenie 9).

Propozícia 39 *Nech pre postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je splnená nerovnosť* $a_n \le b_n \le c_n$ *pre všetky* $n \in N$. *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = d$. *Potom je aj postupnosť* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergentná, pričom* $\lim_{n\to\infty} b_n = d$.

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady tvrdenia. Ukážeme, že potom $\lim_{n\to\infty} b_n = d$.

Nech $\varepsilon > 0$. Z vlastností $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = d$ dostávame, že existuje $n_1 \in N$ tak, že pre všetky $n \in N, n \geq n_1$ je $a_n \in O_\varepsilon(d)$ a existuje $n_2 \in N$ tak, že pre všetky $n \in N, n \geq n_2$ je $c_n \in O_\varepsilon(d)$.

Ak označíme $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tak pre všetky $n \in N, n \geq n_0$ je súčasne $a_n \in O_\varepsilon(d)$ aj $c_n \in O_\varepsilon(d)$. Avšak množina $O_\varepsilon(d)$ je interval, a nakoľko pre všetky $n \in N$ je $a_n \leq b_n \leq c_n$, je pre všetky $n \in N, n \geq n_0$ aj $b_n \in O_\varepsilon(d)$.

Tým sme ukázali, že postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a jej limita je d. ♣

Podobne ako pri tvrdení 38 aj tu stačí predpokladať splnenie nerovnosti medzi členmi daných postupností pre všetky členy okrem konečného počtu.

Dôležitú kategóriu konvergentných postupností popisuje nasledujúce tvrdenie.

Propozícia 40 *Každá rastúca zhora ohraničená postupnosť je konvergentná. Každá klesajúca zdola ohraničená postupnosť je konvergentná.*

Dôkaz. Nakoľko dôkazy oboch tvrdení sú až na detaily rovnaké, dokážeme iba prvé z nich. Nech teda $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca zhora ohraničená postupnosť. To znamená, že množina všetkých jej hodnôt je zhora ohraničená. Nech s je supremum tejto množiny. Ukážeme, že $s = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Nech $\varepsilon > 0$. Z vlastností suprema množiny vidíme, že aspoň jeden člen postupnosti sa nachádza v intervale $(s - \varepsilon, s]$. Nech je to člen a_{n_0}. To znamená, že $a_{n_0} \in O_\varepsilon(s)$. Ak $n \in N, n \geq n_0$, tak $a_n \geq a_{n_0}$, pretože postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a zároveň $a_n \leq s$, pretože s je horné ohraničenie množiny všetkých hodnôt tejto postupnosti. Teda pre všetky $n \in N, n \geq n_0$ je $a_n \in O_\varepsilon(s)$, čo znamená, že $s = \lim_{n\to\infty} a_n$, a teda postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná. ♣

6.3 Nevlastné limity

V časti 4.1 sme zaviedli rozšírenú množinu reálnych čísel, doplnenú o prvky $-\infty$ a ∞ a definovali sme okolia týchto prvkov. Prepíšme teraz definíciu limity (definícia 23) tak, aby limitou postupnosti bol bod ∞. Na rozdiel od prípadu, kedy je limitou postupnosti reálne číslo, takúto limitu budeme nazývať nevlastnou limitou.

Definícia 25 *Prvok ∞ je nevlastnou limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $K \subseteq N$ tak, že pre všetky $n \in N \setminus K$ je $a_n \in O_\varepsilon(\infty)$.*

Analogicky definujeme aj nevlastnú limitu $-\infty$.

Definícia 26 *Prvok* $-\infty$ *je nevlastnou limitou postupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*, ak pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje konečná množina* $K \subseteq N$ *tak, že pre všetky* $n \in N \setminus K$ *je* $a_n \in O_\varepsilon(-\infty)$*.*

Vzhľadom na tvrdenie v cvičení 21 môžeme aj na označenie nevlastnej limity postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ použiť symbol $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Ak chceme zdôrazniť, že limita postupnosti je reálne číslo, hovoríme v takom prípade o vlastnej limite. Na základe podobných úvah ako v časti venovanej vlastným limitám môžeme vysloviť nasledujúce tvrdenia.

Propozícia 41 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *práve vtedy, keď ku každému* $M > 0$ *existuje* $n_0 \in N$ *tak, že pre všetky* $n \in N, n \geq n_0$ *je* $a_n > M$*.*

Propozícia 42 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *práve vtedy, keď ku každému* $M < 0$ *existuje* $n_0 \in N$ *tak, že pre všetky* $n \in N, n \geq n_0$ *je* $a_n < M$*.*

Obdobou tvrdenia 38 pre postupnosti s nevlastnými limitami je nasledujúca propozícia.

Propozícia 43 *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *a nech* $a_n \leq b_n$ *pre všetky* $n \in N$*. Potom aj* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$*.*

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady tvrdenia. Nech $M > 0$. Potom existuje $n_0 \in N$ tak, že pre všetky $n \in N, n \geq n_0$ je $a_n > M$ a z predpokladu $b_n \geq a_n$ vidíme, že pre takéto n je aj $b_n > M$, čím sme ukázali, že $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. ♣

Analogické tvrdenie je možné sformulovať a dokázať pre prípad nevlastnej limity $-\infty$. Podobne ako pri vlastných limitách aj tu stačí požadovať splnenie nerovnosti $a_n \leq b_n$ pre všetky prirodzené čísla okrem konečného počtu, čiže od istého $n_0 \in N$.

Pri práci s nevlastnými limitami sú často užitočné nasledujúce tvrdenia.

Propozícia 44 *Ak* $\lim_{n\to\infty} a_n \in R, \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$*, tak* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$*.*

Propozícia 45 *Ak* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *je kladné reálne číslo,* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$*, tak* $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$*.*

Propozícia 46 *Ak* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *je záporné reálne číslo,* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$*, tak* $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$*.*

Dôkazy týchto tvrdení prenechávame čitateľovi ako cvičenia, rovnako aj formuláciu a dôkazy podobných viet pre nevlastný bod $-\infty$. Ako dôsledky týchto tvrdení dostaneme tvrdenia pre limity postupností typu $\{P(n)\}_{n=1}^{\infty}$, kde P je polynóm stupňa aspoň jedna. Pre takéto postupnosti je $\lim_{n\to\infty} P(n) = \infty$, ak je koeficient pri najvyššej mocnine n kladný a $\lim_{n\to\infty} P(n) = -\infty$, ak je koeficient pri najvyššej mocnine n záporný.

Teraz už môžeme vyriešiť aj posledný prípad, ktorý môže nastať pri určovaní limity postupností tvaru $\left\{\frac{P(n)}{Q(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, kde P, Q sú polynomické funkcie, a to ten, v ktorom je stupeň polynómu P vyšší ako stupeň polynómu Q. Takýto zlomok vydelíme, čím dostaneme

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = S(n) + \frac{T(n)}{Q(n)},$$

kde stupeň polynómu S je aspoň 1 a stupeň polynómu T je rovnaký alebo nižší ako stupeň polynómu Q. Na základe predchádzajúcich úvah vidíme, že limita takejto postupnosti bude rovnaká ako $\lim_{n\to\infty} S(n)$, a teda nevlastná.

Na záver terminologická poznámka. Pojem konvergentná postupnosť nerozširujeme na postupnosti s nevlastnými limitami, teda konvergentná postupnosť je postupnosť, ktorá má vlastnú limitu.

6.4 Postupnosti intervalov

Táto časť je venovaná dôkazu Cantorovej vety, ktorá sa využíva vo viacerých dôležitých tvrdeniach matematickej analýzy. Vetu je možné sformulovať a dokázať aj v oveľa všeobecnejšom kontexte, tu sa ale obmedzíme na jej verziu pre uzavreté ohraničené intervaly na reálnej osi.

Propozícia 47 *Nech $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť uzavretých ohraničených intervalov v množine R, pričom pre každé $n \in N$ je $I_{n+1} \subseteq I_n$. Potom $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.*

Dôkaz. Nech $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť spĺňajúca predpoklady tvrdenia. Pre každé $n \in N$ označme $I_n = [a_n, b_n]$. Potom je zrejme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca a postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesajúca.

Zo vzťahov inklúzie medzi množinami I_n vidíme, že pre všetky $n \in N$ je $I_n \subseteq I_1$. Pre ľubovoľné $n \in N$ je teda $a_n \leq b_1$. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je teda zhora ohraničená, a teda podľa tvrdenia 40 je konvergentná.

Označme $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ukážeme, že $a \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$, čím bude dokázané, že táto množina je neprázdna.

Skutočnosť, že pre všetky $n \in N$ je splnené $a_n \leq a$ je zrejmá, vyplýva z monotónnosti postupnosti $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ukážeme, že pre všetky $n \in N$ je splnená aj nerovnosť $a \leq b_n$.

Nech by existovalo $n_0 \in N$ tak, že $a > b_{n_0}$. Potom $a \neq I_{n_0}$ a keďže množina $R \setminus I_{n_0}$ je otvorená, existuje okolie $O_\varepsilon(a)$ tak, že $O_\varepsilon(a) \cap I_{n_0} = \emptyset$. Vzhľadom na inklúzie medzi intervalmi tým skôr $O_\varepsilon(a) \cap I_n = \emptyset$ pre všetky $n \in N, n \geq n_0$. Toto je ale v rozpore so skutočnosťou, že $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, pretože $a_n \in I_n$ pre všetky $n \in N$.

Teda pre všetky $n \in N$ je $a_n \leq a \leq b_n$, čiže $a \in I_n$ pre všetky $n \in N$. Potom ale $a \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$, a teda množina $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ je neprázdna. ♣

Toto tvrdenie sa niekedy uvádza aj ako veta o prieniku postupnosti do seba zapadajúcich uzavretých ohraničených intervalov.

Všimnime si význam jednotlivých predpokladov tvrdenia 47. Ak by sme nepožadovali uzavretosť intervalov I_n (a pritom ponechali všetky ostatné predpoklady), tvrdenie by nebolo pravdivé. Stačí uvážiť napríklad postupnosť otvorených intervalov $\{(0, \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$. Ide o ohraničené intervaly spĺňajúce podmienku $(0, \frac{1}{n+1}) \subseteq (0, \frac{1}{n})$ avšak ľahko je vidieť, že ich prienik je prázdna množina.

Pokiaľ by intervaly v tvrdení neboli ohraničené (ale pritom by boli do seba zapadajúce a uzavreté), tvrdenie by takisto nebolo pravdivé. Ako príklad môžeme vziať postupnosť intervalov $\{[n, \infty)\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej prienik je prázdna množina.

Pre úplnosť poznamenajme, že nevyhnutná je aj podmienka inklúzie, tu je však situácia jasná, ak by sa medzi intervalmi vyskytli čo len dva disjunktné, prienik všetkých intervalov by bola prázdna množina.

Ak je v tvrdení 47 navyše splnená jedna doplňujúca podmienka, prienik príslušných intervalov je dokonca jednoprvková množina. Hovorí o tom nasledujúca propozícia.

Propozícia 48 *Nech sú splnené predpoklady propozície 47 a nech navyše $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, kde $I_n = [a_n, b_n]$. Potom je množina $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ jednoprvková.*

Dôkaz. Nech sú splnené predpoklady propozície 47 a nech navyše $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Nech existujú $x, y \in R, x, y \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Označme $\varepsilon = |x - y|$. Nakoľko ide o navzájom rôzne prvky, číslo ε je kladné. Z definície limity postupnosti a z rovnosti $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ vidíme, že k tomuto ε existuje n_0 tak, že $|(b_{n_0} - a_{n_0}) - 0| = b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Rozdiel $b_{n_0} - a_{n_0}$ je však dĺžka intervalu I_{n_0} a body x, y, keďže sú v prieniku všetkých intervalov, sú v každom z nich, a teda aj v I_{n_0}. Žiaden interval ale nemôže obsahovať prvky, ktorých vzdialenosť je väčšia ako dĺžka tohoto intervalu, a teda predpoklad o existencii dvoch rôznych prvkov v prieniku bol nesprávny. ♣

Na záver tejto časti uvedieme príklad dôležitého tvrdenia, pri dôkaze ktorého sa využíva Cantorova veta a jej práve uvedený dôsledok.

Ukázali sme (tvrdenie 31), že každá konvergentná postupnosť je ohraničená. Obrátená implikácia pravdivá nie je, môžeme ale dokázať jej slabšiu verziu.

Propozícia 49 *Každá ohraničená postupnosť reálnych čísel má konvergentnú podpostupnosť.*

Dôkaz. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť reálnych čísel. Nech d jej jej ľubovoľné dolné ohraničenie a h jej jej ľubovoľné horné ohraničenie. Všetky hodnoty tejto postupnosti sa teda nachádzajú v intervale $I_1 = [d, h]$.

Konvergentnú podpostupnosť postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ budeme vyberať nasledujúcim spôsobom. Jej prvý člen bude ľubovoľný prvok tejto postupnosti. Nech jeho index je n_1, je to teda prvok a_{n_1}. Ďalej už uvažujeme iba o postupnosti $\{a_n\}_{n=n_1+1}^{\infty}$, teda o prvkoch s indexom vyšším ako n_1. Tá je zrejme takisto ohraničená a všetky jej hodnoty sú v intervale I_1. Rozdeľme tento interval v jeho polovici na dva uzavreté intervaly $[d, \frac{d+h}{2}], [\frac{d+h}{2}, h]$. Postupnosť $\{a_n\}_{n=n_1+1}^{\infty}$ má v ich zjednotení všetky svoje hodnoty, teda v aspoň jednom z nich sa ich musí nachádzať nekonečný počet. Označme tento interval I_2 a v ňom vyberieme ľubovoľnú hodnotu a_{n_2}.

Popísaný postup zopakujeme s postupnosťou $\{a_n\}_{n=n_2+1}^{\infty}$, takto nájdeme prvok a_{n_3} a tak ďalej. Týmto spôsobom zároveň vytvoríme postupnosť uzavretých ohraničených intervalov $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ s vlastnosťou $I_{n+1} \subseteq I_n$. Všimnime si dĺžky týchto intervalov. Ak označíme dĺžku I_1 ako s, teda $s = h - d$, tak dĺžka intervalu I_n je $\frac{s}{2^n}$. Z nerovností $0 < \frac{s}{2^n} \leq \frac{s}{n}$ pre všetky $n \in N$ vidíme, že postupnosť dĺžok intervalov I_n má nulovú limitu. Z tvrdenia 48 vidíme, že $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ jednoprvková množina.

Označme $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$. Ukážeme, že $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Nech $\varepsilon > 0$. Z definície limity vidíme, že existuje interval I_{n_0}, ktorého dĺžka je menšia ako ε. Nakoľko $a \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$, je aj $a \in I_{n_0}$, a teda $I_{n_0} \subseteq O_\varepsilon(a)$.

Vzhľadom na popísaný spôsob vyberania podpostupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sa ale iba konečný počet prvkov tejto podpostupnosti nachádza mimo intervalu I_{n_0}, a teda iba konečný počet jej prvkov nie je v okolí $O_\varepsilon(a)$. Teda $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, čo znamená, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje konvergentnú podpostupnosť. ♣

Pri štúdiu matematickej analýzy sa stretnete s viacerými ďalšími aplikáciami Cantorovej vety.

6.5 Nekonečné rady

Súčet je jednou zo základných aritmetických operácií. Doteraz ste sa stretávali iba so súčtami konečnej množiny sčítancov. Položme si otázku, či je možné zaviesť pojem súčtu aj pre ich nekonečný počet. Uvažujme teda o postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a pokúsme sa rozumným spôsobom zaviesť symbol

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$$

Zrejme by nebolo ťažké definovať tento symbol vtedy, ak by boli prvky postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ začínajúc istým členom nulové. V takom prípade by sme definovali

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + 0 + 0 + \cdots = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Avšak teória nekonečných súčtov, ktorá by sa zaoberala iba takýmito postupnosťami, by bola pomerne chudobná a hlavne ničím nie zaujímavá, išlo by v podstate iba o iné zápisy obvyklých konečných súčtov.

Môže mať ale nekonečný počet nenulových sčítancov rozumne definovaný súčet? Kladnú odpoveď signalizuje nasledujúca úvaha.

Všimnime si bod 2 na číselnej osi (obrázok 6.3). Polovica jeho vzdialenosti od nuly je 1. Polovica vzdialenosti bodu 1 od nuly je $\frac{1}{2}$. Polovica vzdialenosti bodu $\frac{1}{2}$ od nuly je $\frac{1}{4}$. Polovica vzdialenosti bodu $\frac{1}{4}$ od nuly je $\frac{1}{8}$ a tak ďalej. Takto získame postupnosť bodov. Na jednej strane vidíme, že vzdialenosť čísla 2 od nuly na číselnej osi je súčet vzdialeností medzi jednotlivými po sebe idúcimi bodmi, na druhej strane je táto vzdialenosť očividne 2. Malo by teda byť

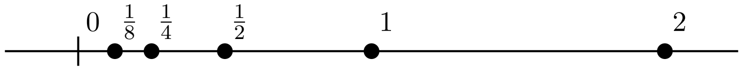
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2.$$

Vidíme, že aj súčet nekonečného počtu kladných sčítancov môže mať celkom intuitívny zmysel. Otázkou zostáva, ako takýto súčet vo všeobecnosti zaviesť.

Zostaňme pri súčte z predchádzajúcej úvahy. Ak by sme mali k dispozícii iba ľavú stranu uvedenej rovnosti a chceli by sme vedieť aspoň jej približnú hodnotu, zrejme by sme postupovali tak, že by sme sčítali niekoľko jej prvých členov a výsledok by sme prehlásili ze približnú hodnotu súčtu. Ak by sme chceli presnosť odhadu zvýšiť, pridali by sme k súčtu niekoľko ďalších členov.

Teraz by už mala byť pomerne jasná nasledujúca definícia.

Definícia 27 *Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Nech pre každé $n \in N$ je $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Ak existuje vlastná limita $s = \lim_{n\to\infty s_n}$, rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sa nazýva konvergentný číselný rad a číslo s je jeho súčet. Zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.*



Obr. 6.3: Nekonečný súčet

V tejto definícii sú zavedené dva pojmy, nekonečný rad a jeho súčet. Čísla s_n spomínané v definícii sa nazývajú čiastočné súčty príslušného nekonečného radu.

Pri prvom zoznámení sa s pojmom nekonečného radu vzniká prirodzená otázka – aký je rozdiel medzi postupnosťou a nekonečným radom, teda medzi symbolmi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Odpoveď znie, že formálne tu rozdiel nie je nijaký, v oboch prípadoch ide o číselnú postupnosť. Rozdiel je však v tom, čo nás na tejto postupnosti zaujíma. Ak skúmame postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obvykle nás zaujíma, čo sa robí s jej členmi, ak je index n dostatočne vysoký, teda ide o limitu postupnosti. Ak ale skúmame nekonečný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tu nás skôr zaujíma, čo sa pre dostatočne veľké n robí s jeho čiastočnými súčtami, teda ide o súčet členov danej postupnosti.

V ďalšom štúdiu sa zoznámite s mnohými vlastnosťami nekonečných radov, ako aj s metódami ako zistiť, či daný rad má súčet, v zriedkavých prípadoch aj jeho hodnotu. Tu išlo iba o prezentáciu ďalšej dôležitej aplikácie pojmu limity postupnosti.

6.6 Cvičenia

1. Dokážte, že každá konštantná postupnosť je konvergentná.
2. Dokážte, že postupnosť $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je konvergentná.
3. Dokážte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
4. Na základe definície limity postupnosti dokážte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{1+n^2} = 2$.
5. Nájdite $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.
6. Dokážte, že ak má postupnosť kladnú limitu, tak množina jej všetkých záporných a nulových členov je konečná.
7. Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. Dokážte, že množina všetkých celočíselných hodnôt tejto postupnosti je konečná.
8. Nájdite postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktoré nie sú konvergentné, ale pritom postupnosť $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná je.
9. Nájdite konvergentné postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré $a_n < b_n$ pre všetky

$n \in N$, ale $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

10. Kde je chyba v nasledujúcom dôkaze tvrdenia 39? Ak pre všetky $n \in N$ je $a_n \leq b_n$, tak podľa tvrdenia 38 je $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$. Podobne dostaneme $\lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n$. Teda $d = \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n = d$ a odtiaľ $d = \lim_{n\to\infty} b_n$.

11. Nech $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná.

12. Dokážte, že $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} = 0$.

13. Nech $a_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \ldots (1 - \frac{1}{2^n})$. Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná.

14. Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, tak $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. Dokážte.

15. Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = a, b_n = (-1)^n a_n$. Rozhodnite o konvergencii postupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

16. Je pravdivá opačná implikácia k tvrdeniu z predchádzajúceho cvičenia?

17. Pomocou definície nevlastnej limity ukážte, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

18. Dokážte, že $\lim_{n\to\infty}(n - \sin n) = \infty$.

19. Nájdite dvojice postupností s nevlastnými limitami $-\infty$ a ∞ tak, aby ich súčet bola postupnosť a) s nevlastnou limitou $-\infty$, b) s nevlastnou limitou ∞, c) s vopred predpísanou vlastnou limitou $a \in R$, d) bez vlastnej aj nevlastnej limity.

20. Nájdite dvojice postupností s limitami 0 a ∞ tak, aby ich súčin bola postupnosť a) s limitou 0, b) s nevlastnou limitou ∞, c) s vopred predpísanou vlastnou limitou $a \in R, a > 0$, d) bez vlastnej aj nevlastnej limity.

21. Dokážte, že postupnosť nemôže mať súčasne vlastnú a nevlastnú limitu, ani dve rôzne nevlastné limity.

22. Nech $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Potom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje rastúcu podpostupnosť. Dokážte.

23. Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, tak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zdola ohraničená. Dokážte.

24. Dokážte tvrdenia 44, 45 a 46. Využite skutočnosť, že každá konvergentná postupnosť je ohraničená.

25. Ukážte, že ak konečný súčet zapíšeme v tvare nekonečného radu tak, že za posledný člen súčtu pridáme nekonečne veľa núl, súčet tohoto nekonečného radu je rovnaký ako pôvodný konečný súčet.

7 Odporúčaná literatúra

1. Demidovič, B.P.: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003. ISBN 80-7200-587-1.

2. Eliáš, J., Horváth, J., Kajan. J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky Alfa, Bratislava, 1979.

3. Jarník, V.: Diferenciální počet I, Academia, Praha, 1984.

4. Klambauer, G.: Aspects of Calculus, Springer-Verlag, New York, Undergraduate Texts in Mathematics, 1986, ISBN 978–1–4613–9563–8.

5. Kluvánek, I.: Diferenciálny počet funkcie jednej re8lnej premennej, PdF KU Ružomberok, 2007, ISBN 978–80–8084–236–9.

6. Kluvánek, I.: Prípravný kurz k diferenciálnemu a integrálnemu počtu, PdF KU Ružomberok, 2006, ISBN 80–8084–069–5.

7. Kubáček, Z., Valášek, J.: Cvičenia z matematickej analýzy I. časť, Univerzita Komenského, Bratislava, 1989, ISBN 978–80–2230–115–2.

8. Veselý, J.: Matematická analýza pro učitele, Matfyzpress, Praha, 1997, ISBN 80–85863–23–5.

Názov: ÚVOD DO LIMITNÝCH PRECHODOV
Autor: doc. RNDr. Vladimír Janiš, CSc.
Rozsah: 60 strán
Formát: online dokument
Vydanie: prvé, 2016
Vydavateľ: Belianum. Vydavateľstvo Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici
Edícia: Fakulta prírodných vied

ISBN 978-80-557-1077-8