O pravdepodobnosti a miere

Beloslav Riečan

BELIANUM
2015

O PRAVDEPODOBNOSTI A MIERE

Autor : © Dr.h.c. prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc.

Recenzovali :
prof. RNDr. Ladislav Mišík, DrSc.
prof. RNDr. Tibor Neubrunn, DrSc.

Vydavateľ: © BELIANUM. Vydavateľstvo UMB v Banskej Bystrici
Edícia: Fakulta prírodných vied

Za odbornú a jazykovú stránku tohto textu zodpovedá autor.

ISBN 978-80-557-0907-9

PREDSLOV

Táto knižka je úvodom do teórie pravdepodobnosti a do teórie integrálu.

Štúdium vcelku základných otázok teórie pravdepodobnosti robí poslucháčom značné ťažkosti, často väčšie ako štúdium iných, možno aj komplikovanejších matematických teórií. Možno je chyba aj v tom, že sa výklad pravdepodobnostných pojmov chápaných zväčša intuitívne vymyká z bežného matematického vzdelania našej mládeže. Matematické vzdelanie sa sústreďuje najmä na matematickú analýzu, čiastočne aj na geometriu a algebru.

Ale ak je to tak, potom by výklad pravdepodobnostných otázok na základe matematickej analýzy mohol uľahčiť štúdium teórie pravdepodobnosti. Súčasne by bol takýto výklad moderný, pretože by tesnejšie korešpondoval so súčasným stavom v teórii prvdepodobnosti.

V čom spočíva súvis medzi teóriou pravdepodobnosti a matematicko analýzou? Zjednodušene povedané v tomto: Ak A, B sú dve nezlúčiteľné udalosti (javy) a $A \cup B$ je udalosť, ktorá spočíva v tom, že nastane aspoň jedna z udalostí A, B, tak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Rovnakú vlastnosť má však aj miera (ako mieru si predstavme napr. plošný obsah).

Napísal som už,že mojím cieľom bolo podať taký výklad základných pojmov teórie pravdepodobnosti, ktorý by bol čo najúčinnejší z metodického aj odborného hľadiska. To bol prvý impulz, ktorý ma viedol k myšlienke napísať túto publikáciu. Pravda, nie jediný a teraz už ani nie hlavný. Ale aj tak som sa v I. kapitole okrem iného pokúsil ukázať ako si predstavujem taký výklad už na celkom elementárnej úrovni.

Vyskytla sa tu totiž ešte ďalšia otázka: ako ďaleko ísť, čo všetko vysvetľovať alebo zdôvodniť. Rozhodol som sa nezahŕňať do knižky veľmi veľa materiálu, výsledkov, ale podrobne objasniť základné pojmy. A to nebolo možné bez použitia modernej teórie Integrálu, akú vytvoril na začiatku 20. storočia H. Lebesgue. Určil som si preto cieľ - vysvetliť systematicky, podľa možnosti zrozumiteľne a súčasne na minimálnej ploche základy tejto teórie. Predloženú prácu možno použiť aj ako samostatný úvod do teórie integrálu. Minimálny program takého štúdia tvoria kapitoly II, III a 6 častí kapitoly IV.

Od čitateľa nepredpokladám viac, ako by mal vedieť lepší maturant. Určitá náročnosť problematiky predpokladá primerané vzdelanie, aké možno konštatovať povedzme po dvoch semestroch matematiky na univerzite alebo technike. Ak treba azda niečo zdôrazniť z predbežných znalostí, je to pojem nekonečného číselného radu.Ťažsie dôkazy (prípadne aj paragrafy) označujem hviezdičkou. Vyžadujú podrobné a trpezlivé štúdium. Pri prvom čítaní ich možno prípadne vynechať.

Knižka vznikla na základe mojich viacročných prednášok na Prírodovedeckej fakulte UK a na stavebnej fakulte SVŠT. Tieto prednášky sa týkali teórie pravdepodobnosti, prípadne matematickej štatistiky, ako aj matematickej analýzy. Ak som mal niekoho na mysli, pre koho som túto knižku písal, tak to boli tí inžinieri, ale aj študenti, ktorí sa nad matematickými pojmami hlboko zamýšľajú. Rád by som presvedčil aj našu matematickú verejnosť, že je možný výklad modernej teórie integrálu vhodný pre základné prednášky na všetkých typoch vysokých škôl, na ktorých sa integrálny počet prednáša. Pravdaže táto knižka nemôže nahradiť učebnice.

Súčasne by som chcel poďakovať recenzentom publikácie doc. RNDr. Ladislavovi Mišíkovi, DrSc. a doc. RNDr. Tiborovi Neubrunnovi, Csc, mojim bývalým učiteľom.

Recenzenti nielenže podrobne prečítali rukopis a upozornili na nedopatrenia, ale usilovali sa (v rámci možností, ktoré im poskytoval text) aj poznámkami a doplnkami prispieť k cieľu, ktorý publikácia sleduje. Ďakujem aj spolupracovníkom, ktorí ma podporovali a povzbudzovali, prípadne čítali časti rukopisu, najmä RNDr. Milošovi Franekovi, ktorý starostlivo a dôkladne prečítal prvú verziu knihy.

Bratislava,apríl 1971

AUTOR

ELEMENTÁRNA TEÓRIA PRAVDEPODOBNOSTI

ELEMENTÁRNA DEFINÍCIA PRAVDEPODOBNOSTI

Predpokladáme, že čitateľovi je známy súčasný spôsob písania matematických prác s použitím množinovej terminológie. Pripomenieme si niektoré označenia. Ak A je množina a x je prvok patriaci do množiny A, píšeme $x \in A$. V opačnom prípade, ak prvok x nepatrí do množiny A, píšeme $x \notin A$. Ďalej píšeme $A \subset B$, ak každý prvok množiny A je aj prvkom množiny B, t. j. ak $x \in A \Rightarrow x \in B$. Množina $A \cup B$ je množina práve tých prvkov, ktoré patria aspoň do jednej z množín A, B, množina $A \cap B$ je množina práve tých prvkov, ktoré patria do oboch množín A, B, množina $A - B$ je množina práve tých prvkov,ktoré patria do A, ale nepatria do B. Znakom $\emptyset$ označujeme prázdnu množinu, teda takú množinu, ktorá neobsahuje nijaký prvok. Operácie $\cup$ a $\cap$ možno prirodzeným spôsobom definovať napr. aj pre ľubovoľný konečný systém $A_1, \cdots, A_n$. V tom prípade píšeme $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ resp. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Ak množina X obsahuje len konečný počet prvkov, povedzme $x_1, \cdots, x_n$, píšeme $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Ak $V(x)$ je nejaký výrok o prvku x, tak znakom $\{x : V(x)\}$ označujeme množinu všetkých tých prvkov x, pre ktoré výrok $V(x)$ platí. A ešte jedno označenie: Ak f je nejaká funkcia (zobrazenie), A je jej definičný obor a B obsahuje množinu hodnôt, píšeme $f : A \to B$. Niekedy tiež $f : x \mapsto f(x)$. Čitateľovi, ktorému uvedené pojmy nie sú celkom bežné, odporúčame urobiť si najprv niektoré z prvých cvičení v tejto kapitole.
Vysvetlíme teraz základné pojmy elementárnej teórie pravdepodobnosti. Azda v každej knižke o pravdepodobnosti sa vyskytuje príklad o hádzaní kockou je 6 možných výsledkov - môže padnúť stena s i bodkami, kde $i = 1, 2, \cdots, 6$. Pravdepodobnosť každého z týchto výsledkov (udalostí) je rozumné definovať číslom $\frac{1}{6}$, pretože udalostí je vcelku 6, ale len jedna je priaznivá. Podobne možno definovať aj pravdepodobnosť iných udalostí. Nech napr. udalosť A spočíva v tom, že na kocke padne stena s párnym počtom bodiek. V tomto prípade máme 3 priaznivé výsledky (môže padnúť stena s 2, 4 alebo 6 bodkami), teda pravdepodobnosť $P(A)$ udalosti A definujeme číslom $\frac{3}{6}$. Uvedený príklad aj mnohé ďalšie (hádzanie mincou, vyťahovanie guľočok z urny, ťahanie kariet a pod.) sú nazorné a jasné. Tieto zatiaľ intuitívne úvahy však musíme postaviť na pevný matematický základ. Súčasne sa dohodneme o terminológii.
Z abstraktného hľadiska (napr. v príklade o kocke) máme vždy danú nejakú množinu X o 6 prvkoch $x_1, \cdots, x_6$, pričom prvku x_i zodpovedá padnutie steny s i bodkami. Túto skutočnosť zapíšeme v tvare $X = \{x_1, \cdots, x_6\}$, pričom $x_1, \cdots, x_6$ nazveme *elementárny udalosťami* a množinu X nazveme *základným priestorom* alebo *priestorom elementárnych udalostí* alebo aj *istou udalosťou. Udalosťou* rozumieme totiž ľubovoľnú podmnožinu A množiny X $(A \subset X)$ a v prípade, že $A = X$ je isté, že $x_i \in A$, nech by x_i bolo akékoľvek. Druhý krajný prípad nastane keď $A = \emptyset$. Túto udalosť nazveme nemožnou, pretože nie je možné, aby $x_i \in \emptyset$ pre nejaké i. *Pravdepodobnosťou* udalosti $A \subset X$ potom roumieme podiel počtu prvkov A a počtu prvkov X (čo je v našom prípade číslo 6). Napr. v uvedenom príklade, v ktorom A spočívalo v tom, že padla stena s párnym počtom bodiek, sa $A = \{x_2, x_4, x_6\}$ a $P(A) = \frac{3}{6}$.
Zovšeobecnenie na ľubovoľnú konečnú množinu $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ je zrejmé. Udalosti (v inej terminológii javy) sú tu opäť ľubovoľné podmnožiny množiny X a pre $A \subset X$ platí $P(A) = \frac{m}{n}$ kde m je počet prvkov množiny A (počet

prvkov $\emptyset$ je 0). Nech $\mathscr{S}$ je systém všetkých podmnožín X. Ako vidieť na pravdepodobnosť sa môžeme dívať ako na funkciu P definovanú na $\mathscr{S}$, ktorá každej udalosti (množine) A zo systému $\mathscr{S}$ priraďuje číslo $P(A)$. Každý "praktický pokus"je z matematického hľadiska popísaný trojicou $(X, \mathscr{S}, P)$. Pre rôzne "praktické experimenty"môžeme dostať, prirodzene rôzne trojice. Slovo udalosť má popri práve definovanom abstraktnom význame aj svoj vlastný, intuitívny význam. Ak nepôjde o presné formulácie, nebudeme tieto dva významy ostro odlišovať. Ak je x_i výsledok pokusu a $x_i \in A$, hovoríme, že (pri tom výsledku pokusu) nastáva udalosť A. Dobré je uvážiť intuitívny význam udalostí $A \cup B, A \cap B$. Napríklad, ak nastala ľubovoľná elementárna udalosť x a A, B sú udalosti (v zmysle definície, ktorá je ďalej), tak $x \in A \cap B$ vtedy a len vtedy keď $x \in A, x \in B$, čiže keď nastane aj A aj B. Z toho vyplýva,že udalosti (v bežnom slova zmysle), ktorá spočíva v tom,že nastáva A aj B, zodpovedá udalosť $A \cap B$ (v zmysle definície). Podobne je vhodné fakt "nastáva A alebo B"vyjadriť udalosťou $A \cup B$.
Z uvedenej definície pravdepodobnosti vyplýva, že
$0 \leq P \leq 1, P(\emptyset) = 0, P(X) = 1$. Menej známa je však nasledujúca vlastnosť:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{1}$$

Nech A obsahuje p prvkov, B obsahuje q prvkov. Pretože A a B nemajú spoločné prvky, udalosť $A \cup B$ obsahuje práve $p + q$, a preto aj

$$P(A \cup B) = \frac{p+q}{n} = \frac{p}{n} + \frac{q}{n} = P(A) + P(B)$$

Majme sériu N výrobkov, z ktorých M je chybných, teda $N - M$ dobrých. Vyberme spomedzi tých N výrobkov n a pýtajme sa, aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi je práve m chybných. Počet všetkých možností ako vybrať tých n prvkov spomedzi N je $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$.
Príslušný základný priestor teda pozostáva z $\binom{N}{n}$ elementárnych udalostí. Pomerne ľahko zistíme, že udalosť A spočívajúca v tom, že práve m vybratých prvkov je chybných (t.j. $n - m$ je dobrých) obsahuje $\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}$ elementárnych udalostí.(Porovnaj s cvičením 6.b). Preto

$$P(A) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

To je známy príklad, ktorý sa používa napr. pri kontrole akosti výrobkov. Výpočet je v poriadku. Nedostatok je však v tom, že v "praxi"nepoznáme číslo M a teda ani $P(A)$. Naopak, chceme odhadnúť číslo M (pomocou m), čo možno zistiť alebo odhadnúť len na základe dlhej série pokusov. Takto sa dostávame k odhadu neznámej pravdepodobnosti, čo je úloha matematickej štatistiky. Touto úlohou sa v tejto knižke nebudeme zaoberať, cheli sme len poukázať na to, že aj v elementárnej teórii sa stretávame s úlohami, ktoré v dosiaľ neuspokojivej miere neopisuje uedená schéma. Mali by sme túto schému zovšeobecniť.
Budeme mať opäť konečný priestor elementárnych udalostí, ale nebudeme predpokladať, že všetky elementárne udalosti sú rovnako pravdepodobné. Príslušné pravdepodobnosti nebudeme vypočítavať. Budeme predpokladať, že sú dané. Je napr. známe, že pravdepodobnosť toho, že novorodenec bude chlapec je $0,512$ čo má ten názorný význam, že z 1000 novorodencov bude asi 512 chlapcov. K tomuto číslu sa prišlo na základe skúmania veľkého počtu "pokusov". Podobne je to s príkladom o kocke. Ak napr. ťažisko kocky nie je v strede alebo ak kocka nie je pravidelná, môže sa stať, že nie všetky steny budú padať rovnako často. Z toho vyplýva,že k príslušným pravdepodobnostiam sa možno dopracovať len na základe skúseností, väčšieho či menšieho počtu pokusov. V prípade novorodencov sú spolu dve elementárne udalosti.Priaznivá je jedna. Podľa našej doterajšej definície by teda jej pravdepodobnosť bola $0,5$ čo sa nezhoduje so skutočnosťou. Ešte krikľavejší rozdiel medzi apriórnou definíciou a skutočnosťou môže nastať v príklade týkajúcom sa akosti výrobkov. Nemožno vždy tvrdiť,že každý druhý výrobok bude chybný. Hustota výskytu chybného výrobku závisí od kvality práce, prístrojov a pod. Ešte raz zdôrazňujeme, že nebudeme odhadovať neznáme pravdepodobnosti, hoci treba podotknúť, že teória takého odhadu vyžaduje vybudovanie teórie

pravdepodobnosti. Naša matematická teória začne až v tom okamihu, keď budú dané pravdepodobnosti všetkých elementárnych udalostí.
Budeme len predpokladať, že platí tvrdenie 1 a že $P(X) = 1$. Ak totiž medzi 1000 novorodencami je 512 chlapcov, zostávajúcich 488 sú dievčatá;ak medzi 100 výrobkami je práve 5 nepodarkov, bezchybných je práve 95. Teda súčet pravdepodobností všetkých elementárnych udalostí je 1.
Pristúpme teraz k definícii, v ktorej zhrnieme všetky fakty potrebné na budovanie elementárnej teórie. Súčasne si zopakujeme terminológiu. Pretože text stačí čítať až od tohto miesta, ospravedlňujem sa čitateľovi za dlhý úvod.

Definícia 1 *Daná je neprázdna množina $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ a nezáporná reálna funkcia p definovaná na X, pričom platí $\sum\limits_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$, potom udalosťou nazývame ľubovoľnú podmnožinu množiny X a pravdepodobnosťou $P(A)$ udalosti $A \neq \emptyset$ rozumieme súčet tých čísiel $p(x_i)$, pre ktoré platí,že $x_i \in A$ (pre $A = \emptyset$ definujeme $P(A) = 0$).*

Prvky množiny X nazývame elementárnymi udalosťami a množinu X základným priestorom alebo istou udalosťou. Množinu $\emptyset$ nazývame aj nemožnou udalosťou. Udalosti A, B sa navzájom vylučujú alebo sú nezlúčiteľné ak sú diskjunktné, teda ak $A \cap B = \emptyset$, alebo inak, ak neexistuje elementárna udsalosť patriaca aj do A aj do B. Funkciu p budeme nazývať elementárnou pravdepodobnosťou.
Pripojíme ešte aspoň dve poznámky. Elementárna udalosť je prvok množiny X, udalosť je podmnožina množiny X, teda elementárna udalosť nie je udalosťou. Pravdaže každej elementárnej udalosti $x \in X$ prislúcha udalosť $\{x\} \subset X$. Pritom podľa definície sa $P(\{x\}) = p(x)$.
V prípade, že všetky elementárne udalosti sú rovnako pravdepodobné, platí $1 = \sum\limits_{i=1}^{n} p(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} p = np$, teda $P(x_i) = \frac{1}{n}$. $P(A)$ je súčet pravdepodobností tých x_i, ktoré patria do A. Ak tam patrí práve m prvkov, tak $P(A) = \sum\limits_{x_i \in A} \frac{1}{n} = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$, čo sa zhoduje s našou predchádzajúcou špecializovanou definíciou.

Veta 1 *Platia tieto tvrdenia:*

1. *$P(A) \geq 0$ pre všetky $A \subset X$.*
2. *$P(X) = 1$*
3. *Ak $A \cap B = \emptyset$, tak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*

Dôkaz. Prvé dve tvrdenia sú zrejmé. Tvrdenie 3 je zrejmé, ak jedna z udalostí A, B je prázdna (nemožná). Nech $A = \{x_{j_1}, \cdots, x_{j_k}\}, B = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}\}$. Potom $A \cup B = \{x_{j_1}, \cdots, x_{j_k}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}\}$, teda

$$P(A \cup B) = \sum_{t=1}^{k} p(x_{j_t}) + \sum_{t=1}^{m} p(x_{i_t}) = P(A) + P(B)$$

□

Veta 1 nás privádza k axiomatickej definícii pravdepodobnosti.
Pravdepodobnosť možno definovať axiomaticky ako reálnu funkciu definovanú na systéme všetkých podmnožín (konečnej) množiny X a vyhovujúcu podmienkam $1, 2, 3$. Nech P je takto definovaná funkcia. (Hovoríme tiež množinová definícia, pretože je definovaná na systéme množín a priraďuje množinám čísla). Pre všetky $x \in X$ položme $p(x) = P(\{x\})$. Zrejme podľa podmienky je $p \geq 0$. Z podmienok 2 a 3 vyplýva:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\{x_i\}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}\right) = P(X) = 1$$

Okrem toho uvážme,že ak v podmienke 3 položíme $A = B = \emptyset$, tak $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$, teda $P(\emptyset) = 0$. Práve táto axiomatická definícia bude základom nášho ďalšieho, povedzme neelementárneho bádania v druhej kapitole.
Dôležitú funkciu v celej teórii má tretia vlastnosť, tzv. aditívnosť. Preto jej venujeme zvláštny paragraf.

ADITÍVNOSŤ

Aj keď v tejto kapitole nechceme prekročiť elementárny rámec, niektoré obmedzujúce predpoklady by boli skutočne zbytočné.
Napríklad konečnosť X. Budeme preto predpokladať, že X je ľubovoľná neprázdna množina prvkov, $\mathscr{S}$ je nejaký systém podmnožín X a μ je množinová funkcia definovaná na $\mathscr{S}$, tj. funkcia, ktorá každej množine $E \in \mathscr{S}$ priradí reálne číslo $\mu(E)$. Teda $\mathscr{S}$ nemusí byť systém všetkých podmnožín X a μ nemusí byť pravdepodobnosť.

Definícia 2 *Nech X je ľubovoľná neprázdna množina, $\mathscr{S}$ neprázdny systém podmnožín množiny X, μ množinová funkcia definovaná na $\mathscr{S}$, potom hovoríme, že μ je aditívna, ak pre ľubovoľné dva prvky $A, B \in \mathscr{S}$ kde $A \cup B \in \mathscr{S}$ a $A \cap B = \emptyset$ platí:*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Veta 2 *Nech $\mathscr{S}$ je vzhľadom na zjednotenie uzavretý systém, tj. pre ľubovoľné $A, B \in \mathscr{S}$ platí, že $A \cup B \in \mathscr{S}$. Nech μ je aditívna množinová funkcia definovaná na $\mathscr{S}$ a nech $A_i \in \mathscr{S}\,(i = 1, \cdots, n)$, sú navzájom disjunktné, t.j. $A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j)$. Potom*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

Dôkaz. Spočíva vlastne len v cvičení formulácií. Urobíme ho matematickou indukciou. Tvrdenie je zrejmé pre $n = 1$. Predpokladajme, že platí pre nejaké n a dokážme, že platí aj pre $n + 1$. Nech $A_1, \cdots, A_{n+1}$ sú navzájom disjunktné množiny z $\mathscr{S}$. Podľa predpokladu je $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{S}$ a $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1} = \emptyset$, teda

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu(A_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \mu(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A_i)$$ □

Videli sme,že pravdepodobnosť je aditívna množinová funkcia. Čo možno povedať o pravdepodobnosti $P(A \cup B)$ ak A, B nie sú disjunktné? Príslušný výsledok uvedieme opäť v trochu všeobecnejšom tvare.

Veta 3 *Nech $\mathscr{S}$ je vzhľadom na zjednotenia, prieniky a rozdiely uzavretý systém (t.j. ak $A, B \in \mathscr{S}$, tak $A \cup B, A \cap B, A - B \in \mathscr{S}$), μ je aditívna množinová funkcia na $\mathscr{S}$, potom pre ľubovoľné $A, B \in \mathscr{S}$ je:*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Dôkaz. Pretože $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ a členy zjednotenia na pravej strane patria do $\mathscr{S}$, platí:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B) + \mu(B - A)$$

Ak k obom stranám pripočítame $\mu(A \cap B)$ a uvážime,že z podobných príčin $(A = (A - B) \cup (A \cap B)$ a $B = (B - A) \cup (A \cap B))$ platí:

$$\mu(A) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B), \mu(B) = \mu(B - A) + \mu(A \cap B)$$

dostaneme:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B) + \mu(B - A) + \mu(A \cap B) =$$
$$= \mu(A) + \mu(B) \qquad \square$$

Veta 3 má názorný geometrický význam, ak si pod $\mu(A)$ predstavíme objem nejakého telesa A. Bez ďalšej motivácie uvedieme zovšeobecnenie vety 3 na ľubovoľný počet sčítancov. Poznamenajme ešte, že uzavretosť každého systému vzhľadom na prieniky, ktoré sme predpokladali vo vete 3, je dôsledkom uzavretosti na rozdiely, pretože $A \cap B = A - (A - B)$.

Veta 4 *Nech $\mathscr{S}$ je systém podmnožín množiny X uzavretý vzhľadom na zjednotenie a rozdiely, a teda aj na prieniky. Potom pre ľubovoľné $A_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ platí:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_K) - \cdots + (-1)^{n+1} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

alebo v kratšom zápise

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right)$$

Dôkaz. * Urobíme ho indukciou. Prvý krok je zrejmý. Nech naše tvrdenie platí pre najaké n a nech $A_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, \cdots, n+1)$. Potom podľa vety 3 a indukčného predpokladu platí:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu(A_{n+1}) -$$
$$- \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right) +$$
$$+ \mu(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i} \cap A_{n+1}\right) -$$
$$- (-1)^{n+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_{j_i} \cap A_{n+1}\right) =$$
$$= (-1)^{1+1} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \mu(A_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+2} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i} \cap A_{n+1}\right) +$$
$$+ (-1)^{n+2} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A_i) +$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n+1} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right) + (-1)^{n+2} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n+1} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right) \qquad \square$$

ZÁVISLOSŤ A NEZÁVISLOSŤ

V predchádzajúcej časti sme uspokojivo vyriešili otázku, ako vypočítať $P(A \cup B)$ v prípade, že A, B sa navzájom vylučujú. Vo všeobecnom prípade sme $P(A \cup B)$ vypočítali pomocou $P(A \cap B)$. V tomto paragrafe nám pôjde o výpočet $P(A \cap B)$. Pretože to súvisí so závislosťou resp. nezávislosťou udalostí, naše úvahy budú na chvíľu opäť intuitívne.
Udalosti A, B sú nezávislé, ak $P(A)$ nezávisí od toho, či nastala udalosť B a $P(B)$ nezávisí od toho či nastala udalosť A. Prirodzene to nie je definícia. Prvým pojmom, ktorý s tým súvisí je tzv. podmienená pravdepodobnosť $P(A|B)$ udalosti A za predpokladu, že sa uskutočnila udalosť B
Napr. v urne máme 5 bielych a 7 čiernych guľôčok, fakt, že sa vytiahne biela guľôčka označíme A, ak sa vytiahne čierna guľôčka B, teda $P(A) = \frac{5}{12}, P(B) = \frac{7}{12}$. Je isté,že pravdepodobnosť A sa zmení ak sa predtým uskutoční napr. udalosť B a guľočku do urny nevrátime. V tomto prípade však nebudeme pokračovať, pretože sa nám zdá celkom korektný z dôvodov, o ktorých sa ešte zmienime v ďalšej časti.
Vezmime iný príklad. V závode Z vyrábajú 80 % konzerv určitého druhu. Nech je známe, že pravdepodobnosť toho, že nejaká konzerva zo závodu Z je pokazená je $0,002$. V obchode si kúpime konzervu na konzerve je napísané,že ju vyrobili v závode Z. Aká je pravdepodobnosť toho,že je pokazená? Nech A je udalosť spočívajúca v tom, že konzerva bola vyrobená v Z, teda$P(A) = 0,8$.Ďalej nech B je udalosť spočívajúca v tom, že konzerva je pokazená. Teda $P(A \cap B) = 0,002$. To čo máme vypočítať je $P(B|A)$. Budeme musieť teda najprv urobiť akýsi prepočet a definovať podmienenú pravdepodobnosť podľa jeho výsledku. (Najprv v našom príklade. Spomedzi 10000 konzerv je 8000 vyrobených v Z. Pretože medzi 1000 konzervami sú 2 pokazené zo Z, medzi 10000 konzervami je zo Z pokazených 20. Všetkých možností máme 8000, pretože konzerva je zo Z. "Priaznivých"prípadov je 20. Hľadaná pravdepodbnosť je$\frac{20}{8000} = 0.0025$.)
Nech základný priestor X pozostáva z n prvkov, z ktorých m patrí do udalosti A Povedzme, že spomedzi týchto m elementrárnych udalostí k patrí aj do B. Teda $A \cap B$ obsahuje práve k prvkov. Preto $P(B|A) = \frac{k}{m}$, pretože všetkých udalostí máme m (vieme, že A nastalo) a medzi nimi práve k patrí do B. Teda $P(B|A) = \frac{k}{m} = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Definícia 3 *Pre ľubovoľnú udalosť $A \subset X$ takú, že $P(A) > 0$ a ľubovoľnú udalosť $B \subset X$ definujeme podmienenú pravdepodobnosť takto*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Z teoretického hľadiska sme, prirodzene nič nezistili. Vieme len, že $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ a podobne $P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$, ak $P(B|) > 0$, ale to spočíva len v označení. "Prakticky"však uvedené vzťahy môžeme použiť na riešenie predchádzajúceho príkladu. $P(B|A) = \frac{0,0002}{0,8} = 0,0025$.
Nám ide skôr o vystihnutie nezávislosti, a to môžeme teraz už vhodným spôsobom urobiť. Ak pravdepodobnosť B nezávisí od toho či A nastala alebo nenastala, sa $P(B) = P(B|A)$ alebo $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Keby sme sa rozhodli pre tú prvú definíciu nezávislosti,treba v nej odstrániť istú asymetriu. Ale to je jasné: Ak $P(A) > 0, P(B) > 0$ a $P(B) = P(B|A)$, tak $P(A) = P(A|B)$. O tom sa presvedčíme praimym výpočtom. Rozhodnime sa pre druhú (ekvivalentnú) definíciu, a to už pre ľubovoľný počet udalostí.

Definícia 4 *Nech* $A_1, \cdots, A_n \subset X$ *sú ľubovoľné udalosti. Nazveme ich nezávislými, ak*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) \cdots P(A_n)$$

Túto úvahu uzavrieme dvoma poznámkami:

Poznámka 1 *Je zrejmé,že* A, B *sú nezávislé vtedy a len vtedy, ak platí: alebo jedna z udalostí* A, B *má pravdepodobnosť* 0*, alebo* $P(A) = P(A|B)$.

Poznámka 2 *Z predchádzajúcich úvah sme dospeli k nasledujúcej "vete" o násobení pravdepodobnosti: Ak* A, B *sú nezávislé udalosti, tak* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. *Urobme si na to príklad. Nech* A*, resp.* B *sú udalosti spočívajúce v tom, že prvý resp. druhý strelec trafí terč. Povedzme, že* $P(A) = 0,7, P(B) = 0,8$. *Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň jeden z nich terč trafí?. Teda čomu sa rovná* $P(A \cup B)$*?*
Udalosti A, B *sa nevylučujú, ale vidno, že budú nezávislé, t.j.* $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. *Podľa vety* **??** *potom platí:*
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,8 - 0.7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

S nezávislosťou súvisí ešte jedna otázka, obvykle sa jej však nevenuje dostatočná pozornosť: Ak sú A, B nezávislé, či sú nezávislé aj tzv. opačné udalosti A', B'?

Definícia 5 *Pre* $A \subset X$ *kladieme* $A' = X - A$ *a udalosť* A' *nazývame komplementom udalosti* A *alebo opačnou udalosťou k udalosti* A.

Udalosť A' pozostáva z tých elementárnych udalostí, ktoré napatria do A. Udalosť A' nastane práve vtedy keď A nenastane.

Veta 5 $P(A') = 1 - P(A)$

Dôkaz. Je zrejmé ,že $A \cap A' = \emptyset$ a $A \cup A' = X$. Preto podľa vety **??** platí:

$$1 = P(X) = P(A \cup A') = P(A) + P(A') \qquad \square$$

Veta 6 *Nech* $A_1, \cdots, A_n$ *sú ľubovoľné nezávislé udalosti, potom aj udalosti* $A_1, \cdots, A_m, A'_{m+1}, \cdots, A'_n$ *sú nezávislé.*

Dôkaz. * Najprv uvedieme myšlienku dôkazu. Nech A, B sú nezávislé udalosti. Potom podľa vety 5 a 2 platí:
$P(A' \cap B') = P\big((A \cup B)'\big) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A')P(B')$
A teraz pristúpime k detailnému dôkazu. Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na počet komplementov $A'_{m+1}, \cdots, A'_{m+i}$ $i = 1$ potom
$P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A'_{m+1}\big) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap (X - A_{m+1})) =$
$P(A_1 \cap \cdots \cap A_m - A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{m+1}) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_m) -$
$P(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{m+1}) = P(A_1) \cdot \cdots \cdot P(a_m) - P(A_1) \cdot \cdots \cdot P(A_m)P(A_{m+1}) =$
$P(A_1) \cdot \cdots \cdot P(A_m)(1 - P(A_{m+1})) = P(A_1) \cdot \cdots \cdot P(A_m)P\big(A'_{m+1}\big)$. Podobne nech tá rovnosť platí pri i komplementoch. Potom
$P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A'_{m+1} \cap \cdots \cap A'_{m+i} \cap A'_{m+i+1}\big) =$
$P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A'_{m+1} \cap \cdots \cap A'_{m+i}\big) -$
$P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A'_{m+1} \cap A_{m+i+1}\big) =$
$P(A_1) \cdot \cdots \cdot P\big(A'_{m+1}\big) \cdot \cdots \cdot P\big(A'_{m+i}\big)(1 - P(A_{m+i+1}))$ $\square$

BERNOULLIHO SCHÉMA

Pôjde o pravdepodobnosť v postupnosti nezávislých opakujúcich sa pokusov hádžeme kocku napr. 7-krát a pýtame sa aká je pravdepodobnosť toho, že stena zo 6 bodkami padne pri tom práve trikrát.
Táto udalosť môže byť realizovaná viacerými elementárnymi udalosťami. Tak napr. šestka môže padnúť prvé tri razy (ďalšie štyri razy padnú steny s iným počtom bodiek), môže padnúť posledné tri razy, môže padnúť pri prvom, piatom a šiestom pokuse atď. Takýchto "priaznivých" udalostí je toľko, koľkorakým spôsobom môžeme vybrať spomedzi 7 prvkov 3. A to, ako je známe možno urobiť $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ spôsobmi. Tieto elementárne udalosti označme znakom Q_i $(i = 1, 2, \cdots, 35)$. Každé Q_i charakterizuje to, že trikrát padne šestka (pravdepodobnosť čoho je $p = \frac{1}{6}$) a štyrikrát nepadne šestka (pravdepodobnosť čoho je $q = \frac{5}{6} = 1 - p$) . Pri rôznych Q_i pôjde o rôzne poradie padania, či nepadania šestky preto sa udalosti Q_i navzájom vylučujú a pravdepodobnosť $P(A)$ udalosti A spočívajúcej v tom, že v sérii 7 pokusov padne šestka práve trikrát je súčtom pravdepodobností $P(Q_i)$ 35 elementárnych udalostí.
Vezmime ľubovoľné Q_i. Pretože Q_i charakterizuje to, že v určitých troch pokusoch šestka padne a v ostatných štyroch nepadne a pretože jednotlivé pokusy sú "nezávislé", platí

$$P(Q_i) = p^3 q^4$$

čo je správne pre každé i. Preto

$$P(A) = \sum P(Q_i) = 35 p^3 q^4$$

Zovšeobecnenie je aj tu zrejmé. Nech U je udalosť, ktorej pravdepodobnosť $P(U) = p$. Nech $q = 1 - p$, aká je pravdepodobnosť udalosti A spočívajúcej v tom, že v sérii n nezávislých pokusov sa U vyskytne práve k-krát $(0 \leq k \leq n)$. Táto pravdepodobnosť je:

$$P(A) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Toto je veľmi dôležitý vzorec v teórii pravdepodobnosti a matematickej štatistiky a odvodili sme ho (odhliadnuc od všeobecnosti, ktorá tu nie je podstatná) dosť podrobne. Predsa však nie je všetko v poriadku. Nepovedali sme totiž presne, čo je základný priestor X, nedefinovali sme formálne Q_i a aj výpočet $P(Q_i)$ bol len intuitívny.
Urobme povedzme 7 pokusov a výsledky zaznamenajme v tvare postupnosti symbolov napr.$(+, -, +, +, -, -, +)$, $(-, +, -, -, +, +, -)$ Miesto v postupnosti udáva číslo opakovaného pokusu. Znamienko $+$ píšeme vtedy, keď v príslušnom pokuse udalosť U nastala, $-$ píšeme ak nenastala. Príslušný "nový"základný priestor X (ten pôvodný označme napr. X_0) možno teda popísať pomocou konečných postupností prvkov z X_0. Tak napr. druhá z uvedených sedmíc (7-členných postupností) patrí do udalosti A spomínanej na začiatku tejto časti prvá z nich tam nepatrí. Pokiaľ ide o takto zavedené X (množina všetkých sedmíc prvkov z X_0), má v matematike presne určené označenie i pomenovanie.
Formulujme to opäť všeobecnejšie. Nech X_i $(i = 1, \cdots, n)$ sú ľubovoľné neprázdne množiny prvkov. Potom znakom $X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} X_i$ budeme rozumieť množinu všetkých usporiadaných n-tíc $x = (x_1, \cdots, x_n)$, kde $x_i \in X_i$. Množinu X nazývame kartézskym súčinom množín $X_1, \cdots, X_n$.
Vhodný základný priestor by sme teda už mali. (O opakovanie pôjde, pravda vtedy, ak sú všetky X_i rovnaké). Treba ešte definovať pravdepodobnosť.

Vzhľadom na to, že uvažujeme konečné X_i (tento predpoklad sme vynechali len pri definícii kartézskeho súčinu), stačí definovať pravdepodobnosť elementárnych udalostí, alebo inak elementárnu pravdepodobnosť na X.
K tomu nám opäť prispejú naše predchádzajúce intuitívne úvahy. Vezmime to zase trochu všeobecnejšie: X_i nemusia byť rovnaké a tak isto ani elementárne pravdepodobnosti p_i na X_i. Chceme len modelovať nezávislosť. Stojíme pred problémom definovať pravdepodobnosť $p(x) = p(x_1, \cdots, x_n)$ elementárnej udalosti $x = (x_1, \cdots, x_n)$ spočívajúcej v tom, že pri prvom pokuse je výsledok x_1, pri druhom $x_2, \cdots$, pri n-tom x_n. Ak sú tie pokusy "nezávislé", treba príslušné pravdepodobnosti vynásobiť. Teda
$p(x_1, \cdots, x_n) = p_1(x_1) \cdot \cdots \cdot p(x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$
Je takto definovaná funkcia p na X elementárnou pravdepodobnosťou? V nasledujúcej leme sa presvedčíme,že áno.

Lema 1 *Ak sú p_i elementárne pravdepodobnosti na konečných priestoroch $X_i\,(i = 1, \cdots, n)$, tak funkcia p definovaná na kartézskom súčine $X = \times_{i=1}^{n} X_i$ rovnosťou $p(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$ je elementárna pravepodobnosť na X*

Dôkaz. [1] Zrejme, že $p \geq 0$. Nech $x_i = \{x_{i1}, \cdots, x_{ik_i}\}$ pre $i = 1, \cdots, n$. Pretože p_i sú elementárne pravdepodobnosti, platí:

$$\sum_{j_i=1}^{k_i} p_i(x_{ij_i}) = 1\,(i = 1, \cdots, n)$$

Ďalej
$\sum_{x\in X} p(x) = \sum_{x\in X} p(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{x\in X} \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i) =$
$\sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=k}^{k_n} p_1(x_{1j_1}) \cdots p_n(x_{nj_n}) =$
$\sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_{n-1}=1}^{k_n} p_1(x_{1j_1}) \cdots p_{n-1}\big(x_{n-1j_{n-1}}\big) \sum_{j_n=1}^{k_n} p_n(x_{nj_n}) =$
$(p(x_{11}) + \cdots + p(x_{1k_1})) \cdots (p(x_{n1} + \cdots + p(x_{nk_n}))) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j_i=1}^{k_i} p(x_{ij_i}) = 1$ □

Definícia 6 *Nech X_i je konečná množina $(i = 1, \cdots, n)$, p_i elementárna pravdepodobnosť na $X_i\,(1 = 1, \cdots, n)$ na množine $X = \times_{i=1}^{n} X_i$ definujeme elementárnu pravdepdobnosť p rovnosťou*

$$p(x) = p(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$$

Priestor s takto definovanou pravdepodobnosťou (teda dvojica (X, p)) sa nazýva postupnosť n nezávislých pokusov.Ak $X_i = X_0\,(i = 1, \cdots, n)$,hovoríme, že (X, p) je postunosť n nezávislých opakujúcich sa pokusov alebo tiež Bernouliho schéma.

Vidno, že v tomto priestore X možno vypočítať pravdepdobnosti rozmanitých udalostí. Napr. v našom príklade je
$A = \{(x_1, \cdots, x_7) : x_i \in U \text{pre 3 indexy } i, x_i \notin U \text{pre 4 indexy } i\}$. Spracovať predchádzajúce úlohy precíznejšie nie je problém. Ponúka sa aj jedno veľmi zaujímavé zovšeobecnenie: Uvažovať namiesto dvoch výsledkov U, U' konečný systém $U_1, \cdots, U_k$ disjunktných udalostí $\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i = X_0\right)$. Iné,z viacerých hľadísk veľmi zaujímavé zovšeobecnenie dáva prípad Bernoulliho schémy s nekonečnou postupnosťou pokusov. K tomu sa ešte vrátime.

[1] Je vhodné urobiť si dôkaz pre $n = 2$

NÁHODNÁ PREMENNÁ A JEJ STREDNÁ HODNOTA

Pojem náhodnej premennej (v inej terminológii náhodnej veličiny) v našom elementárnom (presnejšie konečnom) prípade je veľmi jednoduchý: je to ľubovoľná reálna funkcia na danom pravdepodobnostnom priestore.

Definícia 7 *Nech X je neprázdna, konečná množina, p je elementárna pravdepodobnosť na X. Potom ľubovoľnú reálnu funkciu na X nazývame náhodnou premennou.*

Premennú nazývame náhodnou (náhodnou veličinou), pretože nepoznáme jej hodnotu, ale poznáme len pravdepodobnosti s akými tú ktorú hodnotu nadobúda. Napríklad ak náhodná premenná f znamená počet bodiek na stene kocky, nik nevie povedať, aké číslo padne na hrcej kocke, vieme len to, že to môže byť niektoré z čísiel $1, 2, \cdots, 6$ a všetky sú rovnako pravdepodobné. V tomto pípade je naša náhodná premenná f popísaná nasledujúcim spôsobom:

$$X = \{\omega_1, \cdots, \omega_6\}, p(\omega_i) = \frac{1}{6}, f(\omega_i) = i$$

Túto skutočnosť možno zaznamenať do tabuľky, kde sú v prvom riadku uvedené hodnoty náhodnej premennej x_i $(i = 1, \cdots, k)$, v druhom pravdepodobnosti p_i udalostí A_i spočívajúcich v tom, že náhodná premenná nadobudne hodnotu x_1 (t.j. $A_i = \{\omega : f(\omega) = x_i\}, p_i = P(A_i)$). V našom príklade máme:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Iný príklad. Nech g je náhodná premenná-počet chlapcov v rodine so štyrmi deťmi. V tomto prípade g môže nadobudnúť 5 hodnôt 0 (žiadny chlapec), 1, 2, 3, 4. V predchádzajúcom paragrafe sme vypočítali, že $p_0 = \binom{4}{0}p^0(1-p)^4 = (1-p)^4, p_1 = \binom{4}{1}p^1(1-p)^3 = 4p(1-p)^3$ atď, kde $p = 0,512\cdots$ je pravdepodobnosťou toho, že novorodenec je chlapec.Príslušná tabuľka:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

Všimnime si, že nie je "podstatné", v koľkých elementárnych udalostiach náhodná premenná f nadobudne hodnotu x_i. Dôležitejšie je vedieť, aká je pravdepodobnosť udalosti $\{\omega : f(\omega) = x_i\}$. Nech napr. f náhodná veličina nadobúdajúca hodnoty 0, resp. 1 podľa toho, či na kocke padne číslo menšie ako 2, resp. väčšie alebo rovnajúce sa 2. Ak ω_i zodpovedá padnutiu steny s i bodkami, máme: $X = \{\omega_1, \cdots, \omega_6\}, f(\omega_i) = 0$ pre $i < 2, f(\omega_i) = 1$ pre $i \geq 2$. Príslušná tabuľka (nazýva sa aj rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej f) bude:

x_i	0	1
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

To isté rozdelenie pravdepodobnosti bude mať náhodná premenná g definovaná na nejakom priestore (Y,p)
takto:$Y = \{\alpha_1, \alpha_2\}, p(\alpha_1) = \frac{1}{3}, p(\alpha_2) = \frac{2}{3}, g(\alpha_1) = 0, g(\alpha_2) = 1.$
Stredná hodnota náhodnej premennej sa definuje pomocou rozdelenia pravdepodobnosti.

Definícia 8 *Nech X je neprázdna konečná množina, p je elementárna pravdepdobnosť na X. Ďalej nech f je náhodná premenná definovaná na $X, x_1, \cdots, x_n$ sú hodnoty náhodnej premennej f nadobúdané s pravdepodobnosťami $p_1, \cdots, p_n$ (t.j. $p_i = P(\{\omega : f(\omega) = x_i\}), (i = 1, \cdots, n)$). Strednou hodnotou náhodnej premennej f potom rozumieme číslo*

$$E(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Aby sme si stručne objasnili zmysel strednej hodnoty, predpokladajme,že všetky hodnoty x_i sú rovnako pravdepodobné, teda $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$. V tom prípade

$$E(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

teda stredná hodnota sa rovná aritmetickému priemeru hodnôt $x_1, \cdots, x_n$.
Aritmetický priemer je veľmi dobre známy z bežného života. Keď x_i nie sú rovnako pravdepodobné, posúva sa $E(f)$ viac k tým hodnotám, ktoré sú pravdepodobnejšie $E(f)$ je váženým priemerom. Možno sa nám vynorí v mysli predstava ťažiska: aj to je bližšie k tým miestam, v ktorých je viac hmoty.
V tejto knižke je pojem strednej hodnoty základným pojmom. Aby sme ho mohli definovať v neelementárnom prípade,vybudujeme abstraktnú teóriu integrálu. Preto nemá zmysel, aby sme dokazovali zvlášť v elementárnom prípade niektoré vlastnosti strednej hodnoty. Na ilustráciu postačí snáď jeden príklad.
Uvažujme konštantnú náhodnú premennú. Teda nech sú dané

$$X = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}, p(\omega_1), \cdots, p(\omega_n)$$

a náhodná premenná f vzťahom $f(\omega_i) = c$ pre všetky $\omega_i \in X$. pretože $P(\{\omega : f(\omega) = c\}) = \sum\limits_{i=1}^{n} p(\omega_1) = 1$, dostávame rozdelenie pravdepodobnosti:

x_i	c
p_i	1

Preto platí:

$$E(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = c \cdot 1 = c$$

čo stručne zapisujeme v tvare

$$E(c) = c$$

(Pravda, prvé c znamená konštantnú funkciu, druhé c znamená číslo).
Všimnime si, že podobný efekt dostaneme, keď integrujeme konštantnú funkciu cez interval dĺžky 1, napr.

$$\int_0^1 \mathrm{c}dx = c$$

Naša elementárna schéma nestačí ak máme popísať "náhodnú premennú", ktorá nadobúda nekonečne veľa hodnôt. Pravda aj v konečnom prípade môžeme definovať tzv. distribučnú funkciu. A práve pojem distribučnej funkcie je kľúčovým pri výklade náhodnej premennej vo všeobecnom prípade. Najmä vtedy, ak si z metodických alebo časových príčin nemôžeme dovoliť budovať širšie koncipovanú teóriu.

Definícia 9 *Nech f je náhodná premenná, definovaná na priestore X. Distribučnou funkciou náhodnej premennej f rozumieme reálnu funkciu F definovanú na množine $(-\infty, \infty)$ vzťahom*

$$F(x) = P(\{\omega : f(\omega) < x\})$$

Objasnime si to na príklade. Nech f je náhodná premenná definovaná na priestore
$X = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, p(\omega_1) = 0,1, p(\omega_2) = 0,5, p(\omega_3) = 0,1, p(\omega_4) = 0,3$ s hodnotami

$$f(\omega_1) = -1, f(\omega_2) = 0, f(\omega_3) = 0,5, f(\omega_4) = 0$$

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej f je:

x_i	-1	0	0,5
p_i	0,1	0,8	0,1

Nech $x \leq -1$; "vypočítajme"množinu $\{\omega : f(\omega) < x\}$. Táto množina je prázdna, lebo neexistuje také ω, aby $f(\omega) < x \leq -1$ (t.j. aby $f(\omega) < -1$). Preto

$$F(x) = P(\{\omega : f(\omega) < x\}) = P(\emptyset) = 0 \text{ pre } x \leq -1$$

Ďalej nech $-1 < x \leq 0$. V tomto prípade

$$\{\omega : f(\omega) < x\} = \{\omega_1\}$$

pretože $f(\omega_1) = -1 < x$, ale pre ostatné ω_i je $f(\omega_i) \geq 0$, teda pre ne naplatí $f(\omega_i) < x$. Preto

$$F(x) = P(\{\omega_1\}) = p(\omega_1) = 0,1 \text{ pre } x \in (-1, 0\rangle$$

Podobne pre $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$ dostávame

$$\{\omega : f(\omega) < x\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$$

teda

$$F(x) = 0,1 + 0,5 + 0,3 = 0,9 \text{ pre } c \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$$

Napokon nech $x > \frac{1}{2}$. Potom

$$\{\omega : f(\omega) < x\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = X$$

pretože pre všetky ω_1 platí $f(\omega_i) \leq \frac{1}{2} < x$. Preto

$$F(x) = P(X) = 1 \text{ pre } x > \frac{1}{2}$$

Opäť vidíme, že stačí poznať rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej f.
Podobne vyzerá distribučná funkcia vo všeobecnom prípade (Ak pravda X je konečná množina). Nech $x_1, \cdots, x_n$ sú hodnoty náhodnej premennej $f, p_i \cdots, p_n$ príslušné pravdepodobnosti. Predpokladajme, že $x_1, \cdots, x_n$ sú usporiadané podľa veľkosti (v opačnom prípade by sme ich prečíslovali). Potom

$$F(x) = 0 \text{ pre } x \leq x_1, F(x) = 1 \text{ pre } x \geq x_n$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{j} p_i \text{ pre } x \in (x_j, x_{j+1}\rangle\ (j = 1, \cdots, n-1)$$

Funkcia F teda v bode x_i "skočí" o hodnotu p_j je teda nespojitá v bode x_j, ak je $p_j > 0$
S pojmom distribučnej funkcie sa opäť stretneme.

CVIČENIA

1. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny $A, B \subset X$
   platí:$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B), X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$

3. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny $A_1, \cdots, A_n, B_1, \cdots, B_m$ platí: $\bigcup\limits_{j=1}^{m} \left(B_j \cup \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \right) \right) = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} (B_j \cup A_i) \right) =$
$\bigcap\limits_{i=1}^{n} \left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} (B_j \cup A_i) \right) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \left(B_j \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} A_i \right) \right)$

4. Aký je vzťah medzi množinami $(A - B) \cup C$ a $A - (B \cup C)$?

5. V urne je 8 ružových a 13 fialových guľôčok.
   a) Vytiahneme jednu guľôčku. Aká je pravdepdobnosť, že bude fialová, ružová, oranžová?
   b) Vytiahneme 3 guľočky. Aká je pravdepodobnosť, že dve budú ružové a 1 fialová?

6. Majme 32 kariet, 4 farieb (červeň ,zeleň, žaluď, zvon).
   a) Vytiahneme 1 kartu. Aká je pravdepodobnosť, že to nebude zeleň;že to bude červeň, že to bude túz (bez ohľadu na farbu)?
   b) Vytiahneme 4 karty. Aká je pravdepodobnosť, že práve tri budú červené?

7. Majme 3 hracie kocky a hoďme ich na stôl.
   a) Aká je pravdepodobnosť, že padnú práve dve šestky;aspoň jedna šestka?
   b) Aká je pravdepodobnosť, že súčet bodiek ma týchto troch kockách bude 7;bude menší ako 5?

8. V dielni pracujú 3 stroje. Pravdepodobnosť, že jednotlivé stroje za 1 hodinu nevyžadujú obsluhu je 0,8 resp. 0,7 resp 0,95. Aká je pravdepodobnosť toho, že žiadny z nich nevyžaduje obsluhu;aspoň dva z nich vyžadujú obsluhu?

9. Nech $A_1, \cdots, A_n$ sú navzájom disjunktné udalosti, $\bigcup\limits_{i=}^{n} A_i = X$ je istá udalosť, $P(A_i) > 0\, (i = 1, \cdots, n)$. Dokážte, že pre ľubovoľnú udalosť $B \subset X$ sa $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$.

10. Dokážte, že pre ľubovoľné udalosti A, B kladnej pravdepodobnosti platí $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$.

11. Na základe predchádzajúcich dvoch cvičení dokážte tzv. Bayesovu formulu (A_i majú ten istý význam ako v cvičení 9)

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

12. Pomocou Bayesovej formule riešte túto úlohu.Máme 3 urny. V prvej sú 4 béžové a 3 sivé guľočky, v druhej 5 sivých a 2 zlaté, v tretej 7 zelených a 5 červených. Vybrali sme z niektorej urny sivú guľočku (udalosť B). Aká je pravdepodobnosť, že táto guľočka je z prvej urny ($P(A_1|B)$), ak pri tom predpokladáme, že vytiahnutie guľočky z ktorejkoľvek urny je rovnako pravdepodobné ($P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$)?

13. Aká je prevdepodobnosť toho, že pri 17-násobnom hode kockou padne šestka práve 13-krát;aspoň 3-krát?

14. V dielni pracuje 23 strojov. Pravdepodobnosť poruchy pri každom z nich je p. Aká je pravdepodobnosť toho, že poruchu nebudú mať viac ako 4 stroje;aspoň jeden stroj?

15. Máme k dispozícii 77 výrobkov. Pravdepodobnosť toho, že jeden výrobok spĺňa určité požiadavky je p. Aká je pravdepodobnosť toho,že väčšina výrobkov spĺňa tie požiadavky?

16. Aká je pravdepodobnosť, že v rodine so štyrmi deťmi budú mať asoň jedného syna?Najviac dve dcéry?

17. Nech $f : M \to N$ je zobrazenie, $E \subset M$. Potom definujeme $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$. Dokážte ,že platí $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F), f(E \cup F) = f(E) \cup f(F), f(E - F) \supset f(E) - f(F)$.

18. Nech $f : M \to N$ je zobrazenie, $E \subset N$. Potom definujeme $f^{-1}(E) = \{x : f(x) \in E\}$. Dokážte ,že platí $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F), f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F), f^{-1}(E - F) = f^{-1}(E) - f^{-1}(F)$.

19. Nech a, b sú ľubovoľné reálne čísla. Dokážte, že platí:
$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$,
$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$,
$|a - b| = \max(a, b) - \min(a, b)$,
$|a| = \max(a, 0) - \min(a, 0)$.

PRAVDEPODOBNOSŤ A MIERA

σ−ADITÍVNOSŤ

Pojem miery budeme zatiaľ používať intuitívne, ako spoločný názov pre dĺžku, obsah resp. objem. Budeme teda hovoriť napr. o miere intervalu $\langle a,b\rangle$, miere intervalu $\langle a,b)$, čo je v oboch prípadoch číslo $b-a$.
Medzi mierou a pravdepodobnosťou existuje tesná súvislosť. Obidve množinové funkcie sú nezáporné, miera množiny $\emptyset$ je 0, pravdepodobnosť $\emptyset$ je tiež 0. A navyše spoločnou vlastnosťou je aditívnosť, teda ak
$A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i, A_i\cap A_j=\emptyset\,(i\neq j)$, tak $\mu(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(A_i)$.
Skôr ako by sme skúmali niektoré ďalšie vlastnosti, ktoré má miera aj pravdepodobnosť, nadhodíme ešte dve otázky. Prvá sa týka zavedenia symbolu ∞ a tým súvisiacich dohovorov, druhá množinových operácií s postupnosťami množín.
Potreba zaviesť symbol ∞ je motivovaná potrebou zaviesť mieru napr. neohraničených intervalov. V ďalšom texte budeme znakom R_1 označovať stále množinu všetkých reálnych čísel, znakom R_1^* množinu $R_1\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$. Reálnou funkciou alebo krátko funkciou budeme rozumieť v tejto knižke ľubovoľnú funkciu s hodnotami v R_1^*. Ak všetky hodnoty nejakej funkcie f budú reálne čísla, budeme hovoriť, že f je konečná reálna funkcia, alebo len krátko konečná funkcia.
Na množineR_1^* zavádzame reláciu usporiadania tak, že ak $x,y\in R_1$, tak $x<y$ v prípade, že x je menšie ako y v obvyklom zmysle;ďalej platí $-\infty<x<\infty$ pre každé reálne číslo x definujeme tiež súčet niektorých prvkov z R_1^*, a to $x+y$ obvyklým spôsobom, ak $x,y\in R, \infty+\infty=\infty,(-\infty)+(-\infty)=-\infty,(-\infty)+x=x+(-\infty)=-\infty,\infty+x=x+\infty=\infty$, ak $x\in R$.
Nedefinujeme súčet $\infty+(-\infty)$ resp. $(-\infty)+\infty$.
Teraz k druhej otázke. Ak $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ j ľubovoľná postupnosť podmnožín neprázdnej množiny X, tak znakom $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ (resp. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$) rozumieme množinu práve tých $x\in X$, ktoré patria aspoň do jednej z množín A_n (resp. do všetkých množínA_n). Neskôr budeme potrebovať niektoré množinové rovnosti, napr.

$$E\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap E_n)$$

(tzv. distributívny zákon). Takéto rovnosti sa dokazujú podobne ako v prípade konečného počtu množín dokážeme najprv, že $E\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E\cap E_n)$ (t.j., že každý prvok x patriaci do $E\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)$ patrí aj do $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E\cap E_n)$) a potom aj opačnú inklúziu.
Nech teda $x\in E\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)$. Potom $x\in E$ a súčasne $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ teda $x\in E$ a existuje n, pre ktoré $x\in E_n$. Odtiaľ vyplýva, že existuje n, pre ktoré $x\in E\cap E_n$, to však znamená, že $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E\cap E_n)$.Naopak nech $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E\cap E_n)$, potom existuje n, pre ktoré $x\in E\cap E_n$, teda $x\in E$ aj $x\in E_n$. Preto $x\in E$ a súčasne $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, teda $x\in E\cap\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)$.
Iný príklad. Máme dokázať, že $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)'=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n'$ (tzv. De Morganovo pravidlo). Skutočne $x\in\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)'$ práve vtedy keď $x\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ a to je práve

vtedy keď existuje n, pre ktoré $x \notin E_n$. Posledný vzťah platí práve vtedy, ak existuje n, pre ktoré $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E'_n$ teda $x \in \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)'$ práve vtedy, keď $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E'_n$. Uvedený dôkaz možno skrátene zapísať (pričom nasledujúci symbol $\exists$ čítame "existuje")

$$x \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)' \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \Leftrightarrow \exists n, x \notin E_n \Leftrightarrow \exists n, x \in E'_n \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n$$

V skrátenom zápise môžeme zapísať prvý príklad takto:
$x \in E \cap \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) \Rightarrow x \in E \wedge x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow x \in E \wedge \exists n, x \in E_n \Rightarrow \exists n, x \in E \cap E_n \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E \cap E_n)$. Opačná inklúzia sa dokáže podobne. Pravda, ľahko sa presvedčíme, že všetky uvedené implikácie $\Rightarrow$ možno obrátiť.
A teraz jedno trochu zložitejšie tvrdenie, ktoré budeme v ďalšom texte potrebovať: Ak $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, tak
$E = (E \cap E_1) \cup \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \left[(E \cap E_n) - \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} (E \cap E_i)\right]$ Znakom F označme množinu na pravej strane dokazovanej rovnosti. Inklúzia $F \subset E$ je zrejmá. Naopak nech $x \in E$. Potom podľa predpokladu existuje n, pre ktoré $x \in E_n$. Nech n_0 je najmenšie prirodzené číslo také, že $x \in E_{n_0}$. Ak $n_0 = 1$, tak $x \in E_1$, súčasne $x \in E$, teda $x \in E \cap E_1$ a potom tým skôr patí do F. Nech $n_0 > 1$. Potom $x \notin E_i$ pre $i < n_0$ (n_0 je najmenšie číslo pre ktoré $x \in E_{n_0}$), teda $x \in E \cap E_{n_0}$, ale $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n_0-1} (E \cap E_i)$. Odtiaľ máme, že $x \in (E \cap E_{n_0}) - \bigcup\limits_{i=1}^{n_0-1} (E \cap E_i)$, teda x patrí do F
Množinové rovnosti možno dokazovať aj trochu elegantnejšie, pomocou iných už dokázaných. Napr. rovnosť

$$E - \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E - E_n)$$

možno dokázať pomocou distributívneho zákona, de Morganvho pravidla a rovnosti $A - B = A \cap B'$ takto:

$$E - \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)' = E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap E'_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E - E_n)$$

Pre začiatočníka sa nám zdá byť vhodnejší prvý spôsob. Odporúčame čitateľovi, ktorý nie je v týchto veciach dostatočne zbehlý, aby si spravil dôkaz uvedenej identity ako aj cvičenia 1-3 k tejto kapitole. Taktiež v ďalšom texte treba uvedené množinové rovnosti vždy podrobne a trpezlivo dokazovať.
Vráťme sa teraz k pôvodnej téme. Dôležitou vlastnosťou, ktorú má miera a ktorá má dôležitú úlohu aj v teórii pravdepodobnosti je $\sigma-$aditívnosť.

Definícia 10 *Nech $\mathscr{S}$ je systém podmnožín neprázdnej množiny X, μ reálna funkcia definovaná na $\mathscr{S}$. Hovoríme, že μ je $\sigma-$aditívna, ak pre všetky také postupnosti $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ navzájom disjunktných prvkov z $\mathscr{S}$, že $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{S}$, platí:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

To, že je miera aditívna na jednorozmerných intervaloch, je známe. Menej známy je fakt, že je dokonca $\sigma-$aditívna. K dôkazu $\sigma-$aditívnosti miery na priamke použijeme tzv. Borelovu pokrývaciu vetu.
Ak $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť otvorených intervalov, ktorá pokrýva uzavretý ohraničený interval F (t.j. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n \supset F$), tak existuje prirodzené číslo n, pre ktoré $\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_j \supset F$.

Je dôležité, aby F bol uzavretý a ohraničený tzv. kompaktný interval. Borelova veta neplatí napr. pre otvorený interval F. Nech $F = (0,1)\,, U_n = \left(\frac{1}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}\right)$ pre $n = 0,1,2,\cdots$, potom $F \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ (nakreslite obrázok), ale F nemožno pokryť konečným počtom intervalov spomedzi U_n. Z dôvodov, o ktorých sa zmienime neskôr, budeme pracovať na priamke so systémom $\mathscr{P}$ všetkých intervalov typu $\langle a,b) = \{x : a \le x < b\}$. Zrejme platí $\langle a,a) = \emptyset$. Ďalej je zrejmé, že prienik dvoch množín z $\mathscr{P}$ je opäť z $\mathscr{P}$.

Veta 7 *Nech $\mathscr{P}$ je systém všetkých intervalov typu $\langle a,b)$, $(a \le b)$, $\mu(\langle a,b)) = b-a$, potom μ je $\sigma-$aditívna funkcia na $\mathscr{P}$*

Dôkaz. Nech $E = \langle a,b)\,, E_i = \langle a_i,b_i)\,, E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_i, E_i \cap E_j = \emptyset\,(i \ne j)$.
Vezmime n pevne. Potom $E \supset \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, teda podľa známych tvrdení z elementárnej geometrie je:

$$\mu(E) \ge \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

Z toho vyplýva:

$$\mu(E) \ge \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Tažší je dôkaz opačnej nerovnosti. Nech ε je ľubovoľné kladné číslo. Zvoľme c tak, aby $a < c < b, b-c < \varepsilon$. Ďalej zvoľme c_i tak, aby $a < c < b, b-c < \frac{\varepsilon}{2^i}$ $(i = 1,2,\cdots)$. Ak položíme $F = \langle a,c)\,, U_i = (c_i,b_i)$ platí:

$$F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_i, \mu(E) - (c-a) < \varepsilon, b_i - c_i - \mu(E_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

teda

$$\mu(E) < c - a + \varepsilon, b_i - c_i < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Podľa Borelovej pokrývacej vety existuje také n, že $F \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$
Z elementárnej geometrie je opäť známe, že $c - a \le \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - b_i)$,
teda
$\mu(E) < c - a + \varepsilon \le \sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - c_i) + \varepsilon < \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i) + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} + \varepsilon < \sum\limits_{i=2}^{n} \mu(E_i) + 2\varepsilon \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + 2\varepsilon$
Pretože nerovnosť $\mu(E) < \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + 2\varepsilon$ platí pre každé $\varepsilon > 0$, je
$\mu(E) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ □

Keď sme už dosiahli takýto netriviálny výsledok, bude vhodné, ak sa pri ňom ešte chvíľu zdržíme.

Definícia 11 *Znakom $\mathscr{P}$ budeme označovať systém všetkých intervalov $\langle a,b)\,(a \le b)$. Znakom $\mathscr{R}$ budeme označovať systém všetkých množín tvaru $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, kde $E_i \in \mathscr{P}$, n je prirodzené číslo a $E_i \cap E_j = \emptyset\,(i \ne j)$*

Lema 2 *Nech $E \in \mathscr{R}, E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m} F_j, E_i \cap E_j = \emptyset, F_i \cap F_j = \emptyset\,(i \ne j)\,, E_i \in \mathscr{P}\,(i = 1,\cdots,n)\,, F_j \in \mathscr{P}\,(i = 1,\cdots,m)$, potom $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu(F_j)$*

Dôkaz. Pretože $E_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} F_j$, platí $E_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m} (E_i \cap F_j)$. Preto $\mu(E_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j)$; podobne $\mu(F_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j)$.
Potom $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu(F_j)$ □

Definícia 12 *Pre* $E \in \mathscr{R}, E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i, E_i \in \mathscr{P}\,(i = 1, \cdots, n)$ *a* $E_i \cap E_j = \emptyset\,(i \neq j)$ *definujeme:*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

Ak si načrtneme obrázok uvidíme, že definícia 12 je veľmi prirodzená. Miera zjednotenia konečného počtu disjunktných intervalov je súčet dĺžok týchto intervalov. Na obrázku 6 sú znázornené tri vyjadrenia tej istej množiny z $\mathscr{R}$. Lema 2 nás ubezpečuje o tom, že súčet dĺžok týchto intervalov závisí len od množiny E a nie od jej vyjadrenia. Teda lema 2 nás orávňuje k definícii 12

Veta 8 *μ je $\sigma-$aditívna funkcia na $\mathscr{R}$*

Dôkaz. Nech $E \in \mathscr{R}, E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \cap E_j = \emptyset\,(i \neq j)\,, E_i \in \mathscr{R}\,(i = 1, 2, \cdots)$. Pretože $E \in \mathscr{R}$, existujú také $F_j \in \mathscr{P}\,(j = 1, \cdots, k)$, že $E = \bigcup\limits_{j=1}^{k} F_j, F_i \cap F_j = \emptyset\,(i \neq j)$. Podobne $E_i = \bigcup\limits_{t=1}^{t_i} E_i^t$, kde $E_i^t \in \mathscr{P}, E_i^t \cap E_i^s = \emptyset\,(t \neq s)$. Pretože $\bigcup\limits_{j=1}^{k} F_j = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{t=1}^{t_i} E_i^t, E_i^t = \bigcup\limits_{j=1}^{k} (F_j \cap E_i^t)\,(1 = 1, 2, \cdots; t = 1, \cdots, t_i)\,, F_j = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{t=1}^{t_i} (F_j \cap E_i^t)\,(j = 1, \cdots, k)$, pričom $F_j \cap E_i^t \in \mathscr{P}\,(j = 1, \cdots, k; t = 1, \cdots, t_i; i = 1, 2, \cdots)$. Množiny E_i^t pre ľubovoľné t a s sú navzájom disjunktné, t.j. ak $(i,t)\,(j,s)$, tak $E_i^t \cap E_j^s = \emptyset$. Ak je totiž $(i \neq j)$, tak $E_i^t \cap E_j^s \subset E_i \cap E_j = \emptyset$. V prípade, že $i = j$, máme $t \neq s$, teda $E_i^t \cap E_j^s = E_i^t \cap E_i^s = \emptyset$. Preto podľa vety 7:

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{k} \mu(F_j) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{t_i} \mu\big(E_i^t \cap F_j\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{t_i} \sum_{j=1}^{k} \mu\big(E_i^t \cap F_j\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{t_i} \mu\big(E_i^t\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$
□

DEFINÍCIA MIERY A PRAVDEPODOBNOSTI

Pristúpme teraz k axiomatickej definícii miery a pravdepodobnosti videli sme (napr. vo vetách 2-4), že pri tom treba robiť určité predpoklady aj o obore $\mathscr{S}$ množinovej funkcie μ. Ide napr. o to, či je $\mathscr{S}$ uzavretý vzhľadom na zjednotenia

Definícia 13 *Systém $\mathscr{S}$ podmnožín neprázdneho priestoru X sa nazýva okruh, ak je neprázdny a platí implikácia $A, B \in \mathscr{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{S}, A - B \in \mathscr{S}$. Okruh $\mathscr{S}$ sa nazýva algebra, ak $X \in \mathscr{S}$. Okruh (algebra) $\mathscr{S}$ sa nazýva $\sigma-$okruh ($\sigma-$algebra), ak platí implikácia: $A_n \in \mathscr{S}\,(n = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{S}$*

Definícia 14 *Nech $\mathscr{S}$ je okruh podmnožín neprázdneho priestoru X. Množinová funkcia μ definovaná na $\mathscr{S}$ sa nazýva miera ak, je nezáporná, $\sigma-$aditívna a ak má v $\emptyset$ hodnotu 0. Trojica $(X, \mathscr{S}, \mu)$ sa nazýva priestor miery.*

Uveďme niekoľko triviálnych príkladov. Nech X je ľubovoľná neprázdna množina a $\mathscr{S}$ systém všetkých jej podmnožín. Ak položíme $\mu(E) = 0$ pre všetky $E \in \mathscr{S}$, je μ miera. Iná voľba $\mu : \mu(\emptyset) = 0, \mu(E) = \infty$ pre $E \neq \emptyset$. Ďalší príklad: Vezmime $x \in X$ a položme $\mu(E) = 1$, ak $x \in X$, resp. $\mu(E) = 0$, ak $x \notin E$ Predtým (v 1. časti) sme skúmali jeden netriviálny príklad miery. Pravda, treba ešte dokázať, že išlo o množinovú funkciu definovanú na okruhu.

Veta 9 *Nech $\mathscr{R}$ je množinový systém definovaný v definícii 11. Systém $\mathscr{R}$ je okruh*

Dôkaz. Predovšetkým uvážme, že $E, F \in \mathscr{P} \Rightarrow E \cap F \in \mathscr{P}, E - F \in \mathscr{R}$. Nech $E, F \in \mathscr{R}, E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i, F = \bigcup\limits_{j=1}^{m} F_j, E_i \cap E_j = \emptyset, F_i \cap F_j = \emptyset\,(i \neq j)\,, E_i, E_j \in \mathscr{P}$. Potom

$$E \cap F = \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} F_j\right) = \bigcup_{i=1}^{n}\left(E_i \cap \bigcup_{j=1}^{m} F_j\right) = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(E_i \cap F_j) \in \mathscr{R}$$

Okrem toho je zrejmé, že systém $\mathscr{R}$ je uzavretý vzľadom na konečné disjunktné zjednotenia [t.j. $G_j \in \mathscr{R}\,(j = 1, \cdots, k)\,, G_j$ navzájom disjunktné $\Rightarrow \bigcup\limits_{j=1}^{k} G_j \in \mathscr{R}$]. Preto

$$E - F = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=1}^{m}(E_i \cap F_j)\mathscr{R}$$

a napokon

$$E \cup F = E \cup (F - E) \in \mathscr{R}$$

□

Spomeňme ešte dôvod, pre ktorý sme pracovali s intervalmi typu $\langle a, b)$. V tomto prípade totiž rozdiel takých intervalov je z $\mathscr{R}$

Definícia 15 *Miera μ definovaná na okruhu $\mathscr{R}$ rovnosťou $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \langle a_i, b_j)\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ sa nazýva lebesguova miera na okruhu $\mathscr{R}$*

Definícia 16 *Nech* Ω *je ľubovoľná neprázdna množina,* $\mathscr{S}$ *je* $\sigma-$*algebra podmnožín množiny* Ω, P *je miera na* $\mathscr{S}$ *taká, že* $P(\Omega) = 1$. *Potom sa miera* P *nazýva pravdepodobnosťou alebo pravdepodobnostnou mierou, systém* $\mathscr{S}$ *poľom pravdepodobnosti, prvky systému* $\mathscr{S}$ *udalosťami (*$\emptyset$ *nemožná udalosť,* Ω *istá udalosť), prvky* Ω *elementránymi udalosťami, trojica* $(\Omega, \mathscr{S}, P)$ *pravdepodobnostným priestorom.*

Videli sme, že tu ide vlastne o dvojakú terminológiu. Okolnosť, že budeme voľne prechádzať z jednej terminológie do druhej azda nebude čitateľovi robiť ťažkosti.
Ľahko si preverí, že definícia pravdepodobnosti uvedená v kapitole I. je špeciálnym prípadom deinície 16. Neskôr uvedieme aj komplikovanejšie príklady.
Čitateľ si iste všimol, že v modenom poňatí je teória pravdepodobnosti časťou teórie miery.

VLASTNOSTI MIERY

Veta 10 *Nech μ je miera na okruhu $\mathscr{R}$ podmnožín neprázdnej množiny X. Potom platí*

1. *μ je monotónna t.j. ak $E \subset F, E, F \in \mathscr{R}$, tak $\mu(E) \leq \mu(F)$*
2. *μ je subtraktívna t.j. ak $E \subset F, E, F \in \mathscr{R}$ a $\mu(E) < \infty$, tak $\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E)$*

Dôkaz. Pretože $F = E \cup (F - E)\,, E \cap (F - E) = \emptyset$, platí

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E)$$

Odtiaľ okamžite vyplýva druhé tvrdenie. Prvé tvrdenie tiež vyplýva z tejto rovnosti a s nezápornosti $\mu(F - E)$ □

Veta 11 *Každá miera je $\sigma-$subaditívna, t.j. platí, že ak $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i, E \in \mathscr{S}\,(i = 1, 2, \cdots)$, tak $\mu(E) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$*

Dôkaz. Platí rovnosť

$$E = (E \cap E_1) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \left((E \cap E_n) - \bigcup_{i=1}^{n-1} (E \cap E_i) \right)$$

pričom množiny v zjednotení vpravo sú navzájom disjunktné. Preto

$$\mu(E) = \mu(E \cap E_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu \left((E \cap E_n) - \bigcup_{i=1}^{n-1} (E \cap E_i) \right) \leq$$
$$\leq \mu(E_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

□

Veta 12 *μ je polospojitá zdola, t.j. ak μ je miera na okruhu $\mathscr{R}, E_n \in \mathscr{R}, E_n \subset E_{n+1}\,(n = 1, 2, \cdots)\,, \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{R}$, tak $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{R} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$*

Dôkaz. Z monotónnosti miery μ dostávame nerovnosti $\mu(E_n) \leq \mu(E_{n+1}) \leq \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \right) (n = 1, 2, \cdots)$, teda $\lim\limits_{n\to\infty} E_n \leq \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \right)$. Ak $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \infty$, rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \right)$ platí. Nech $\lim\limits_{n\to\infty} E_n < \infty$. Potom $\mu(E_n) < \infty\,(n = 1, 2, \cdots)$. Položme $F_1 = E_1, F_i = E_i - E_{i-1}\,(i = 1, 2, \cdots)$.
Potom $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n, F_n \in \mathscr{R}\,(n = 1, 2, \cdots)\,, F_i \cap F_j = \emptyset\,(i \neq j)$. Preto

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(F_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(E_i - E_{i-1}) =$$
$$= \mu(E_1) + \sum_{n=2}^{\infty} (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1})) = \mu(E_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\mu(E_i) - \mu(E_{i-1})) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

□

Veta 13 *Nech μ je miera na okruhu $\mathscr{R}$. Potom μ je polospojitá zhora, t.j. ak $E_n \in \mathscr{R}, E_n \supset E_{n+1}, \mu(E_n) < \infty \,(n = 1, 2, \cdots)$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{R}$, tak*
$\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

Dôkaz. Položme $F_n = E_1 - E_n \,(n = 1, 2, \cdots)$. Potom
$F_n \in \mathscr{R}, F_n \subset F_{n+1} \,(n = 1, 2, \cdots)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 - \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{R}$. Podľa vety 10 a 12 teda platí:
$\mu(E_1) - \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(E_1 - \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(F_n) =$
$\mu(E_1) - \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$ čiže skutočne $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$ □

Pri pravdepodobnosti P je $P(E_n) \le P(\Omega) = 1$, teda vždy je $P(E_n) < \infty$, preto vo vete 13 netreba preverovať predpoklad konečnosti miery množín E_n.
Čitateľovi odporúčame, aby si jednotlivé vety ilustroval príkladmi. Ukážme to na vete 11. Za μ vezmeme lebesguovu mieru.
Rozdeľme napr. interval $\langle 0, 1)$ na nekonečne veľa disjunktných častí $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right), \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \left\langle \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right), \left\langle \frac{7}{8}, \frac{15}{16}\right), \cdots, \left\langle \frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)$. Dĺžka intervalu $\langle 0, 1)$ je 1, teda $\mu(\langle 0, 1)) = 1$. Dĺžky "deliacich" intervalov sú $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^{n+1}}, \cdots$, teda ich súčet bude

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(\left\langle \frac{2^n - 1}{2^n}, \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Vety 12, 13 sú veľmi názorné, ak vyberáme množiny $E_n \in \mathscr{P}, E \in \mathscr{P}$. Ak sú $E_n \in \mathscr{R}$, tvrdenia týchto vie sa už nazdajú takými "zrejmými".

CVIČENIA

1. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny $E, E_n \,(n = 1, 2, \cdots)$ platí $E \cup \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (E \cup E_n)$.
2. Dokážte, že zo vzťahu $E_n \subset E_{n+1} \,(n = 1, 2, \cdots)$ vyplýva $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} (E_n - E_{n-1})$.
3. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny $E_n \,(n = 1, 2, \cdots)$ platí $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)' = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n'$.
4. nech $\mathscr{R}_1$ je systém všetkých konečných zjednotení intervalov tvaru $\langle a, b) \,(a \le b)$. Dokážte, že $\mathscr{R}_1$ sa zhoduje so systémom $\mathscr{R}$ (definícia 11).
5. Nech $\mathscr{P}$ je ľubovoľný systém množín, μ nejaká $\sigma-$aditívna funkcia na $\mathscr{P}$. Nájdite vlastnosti $\mathscr{P}$ postačujúce na to, aby platila analógia vety 8.
6. Skúste formulovať v podobnom zmysle ako v cvičení 5 zovšeobecnenie vety 9.
7. Dokážte, že systém $\mathscr{S}$ je algebrou vtedy a len vtedy, ak je neprázdny, uzavretý k zjednoteniu a komplementom.
8. Dokážte, že každý okruh je uzavretý vzhľadom na prieniky, $\sigma-$okruh na spočítateľné prieniky (t.j. vzhľadom na prieniky postupností množín).
9. Dokážte, že nezáporná, aditívna funkcia μ taká, že $\mu(\emptyset) = 0$, definovaná na okruhu $\mathscr{R}$ je miera vtedy a len vtedy, keď je polospojitá zdola.
10. Konečná, nezáporná, aditívna (resp. subtraktívna) funkcia na okruhu $\mathscr{R}$ je polospojitá zdola vtedy a len vtedy keď je polospojitá zhora.
11. Dokážte, že v predchádzajúcom cvičení stačí uvažovať polospojitosť zhora v $\emptyset$.

12. Nezáporná funkcia P definovaná na $\sigma-$algebre $\mathscr{S}$ je pravdepodobnosť vtedy a len vtedy, keď $P(\Omega) = 1$ a P je $\sigma-$aditívna.

13. Nezáporná, aditívna (resp. subtraktívna) funkcia P definovaná na $\sigma-$algebre $\mathscr{S}$ je prevdepodobnosť vtedy a len vtedy, keď $P(\Omega) = 1$ a P je polospojitá zhora.

14. V cvičení 10 možno predpoklad nezápornosti vynechať.

15. V cvičení 9 možno predpoklad nezáporonsti nahradiť predpokladom "neklesajúcosti"(t.j $E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$).

16. Nech μ je miera na algebre $\mathscr{S}$. Na systéme 2^X všetkých podmnožín množiny X definujeme funkciu μ^* vzťahom
$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) : E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathscr{S}\right\}$
Dokážte, že μ^* je rozšírením μ t.j. $\mu^*(E) = \mu(E)$ pre všetky $E \in \mathscr{S}$.

17. Funkcia μ^* definovaná v cvičení 16 je vonkajšia miera t.j. $\mu^*(\emptyset) = 0, \mu^*$ je nezáporná, monotónna a $\sigma-$subaditívna.

18. Množina E sa nazýva μ^*-merateľná, ak pre všetky $A \subset X$ platí $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$. Dokážte, že systém $\overline{\mathscr{S}}$ všetkých μ^*-merateľných podmnožín množiny X je algebrou.

    Návod 1 *Dokážte najprv, že $\overline{\mathscr{S}}$ je uzavretý vzhľadom na prieniky a komplementy : $E \cup F = (E' \cap F')'$.*

19. Dokážte, že $E \in \overline{\mathscr{S}}$ vtedy a len vtedy, keď pre všetky $A \subset X$ platí $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$.

20. Dokážte, že $\overline{\mathscr{S}}$ je $\sigma-$algebra. Navyše $\mu^*\left(A \cap \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum\limits_{1=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i)$, ak E_i sú navzájom disjunktné množiny z $\overline{\mathscr{S}}$

    Návod 2 *Podľa cvičenia 18 sa*
    $\mu^*(A) = \mu^*\left(A \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_1\right)'\right) \geq$
    $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right)'\right)$ *pre každé n.*

21. Funkcia $\overline{\mu}$ definovaná na $\sigma-$algebre $\overline{\mathscr{S}}$ rovnosťou $\overline{\mu}(E) = \mu^*(E)$ je miera. Dokážte.

    Návod 3 *V cvičení 20 položiť $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$.*

22. Dokážte, že množina $E \in \overline{\mathscr{S}}$ má mieru nula ($\overline{\mu}(E) = 0$) vtedy a len vtedy, keď k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ množín z $\mathscr{S}$, že $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \varepsilon$.

23. Dokážte, že množinová funkcia μ definovaná na systéme všetkých dvojrozmerných intervalov tvaru $\langle a, b) \times \langle c, d)$ rovnosťou $\mu(\langle a, b) \times \langle c, d)) = (d - c)\,(b - a)$ je $\sigma-$aditívna.

24. Nech μ je aditívna množinová funkcia definovaná na systéme $\mathscr{R}$. Dokážte, že ak existuje $A \in \mathscr{R}$, pre ktoré je $|\mu(A)| < \infty$ a $\emptyset \in \mathscr{R}$, tak $\mu(\emptyset) = 0$

MERATEĽNÁ FUNKCIA A NÁHODNÁ PREMENNÁ

DEFINÍCIA

Aj keď je pojem merateľnej funkcie veľmi dôležitý, veľkú časť kapitoly venovanej integrovaniu možno čítať bez jeho znalosti. Ide o časti 1-3. V tretej časti budeme potrebovať pojem najmenšieho $\sigma-$okruhu nad daným systémom.

Definícia 17 *Nech X je ľubovoľná neprázdna množina, $\mathscr{S}$ je $\sigma-$algebra podmnožín množiny X (dvojicu $(X, \mathscr{S})$ nazývame merateľný priestor), f je reálna funkcia definovaná na X. Funkcia f sa nazýva merateľná (podrobnejšie, merateľná vzhľadom na $\mathscr{S}$), ak $\{x : f(x) < c\} \in \mathscr{S}$ pre všetky reálne čísla c.*

Ak bude systém $\mathscr{S}$ daný budeme hovoriť jednoducho o *merateľnosti*. Niekedy tiež použijeme zvrat: funkcia f definovaná na merateľnom priestore $(X, \mathscr{S})$. Význam tohoto zvratu je iste jasný. Takáto funkcia f je definovaná na množine X. Pokiaľ povieme, že je merateľná, pôjde o merateľnosť vzhľadom na $\mathscr{S}$. Upozorňujeme na to, že f môže nadobúdať aj nekonečné hodnoty. V tom prípade je $\{x : f(x) < c\} = \{x : f(x) = -\infty\} \cup \{x : f(x) \in R_1, f(x) < c\}$.
Okrem toho si všimnime, že:
$\{x : f(x) = -\infty\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f(X) < -n\} \in \mathscr{S}$
$\{x : f(x) = \infty\} = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f(X) < n\}\right)' \in \mathscr{S}$

Definícia 18 *Nech Ω je priestor elementárnych udalostí, $\mathscr{S}$ je pole pravdepodobnosti. Náhodná premenná je konečná merateľná funkcia (vzhľadom na $\mathscr{S}$) definovaná na Ω.*

Ako vidieť náhodná premenná je špeciálnym prípadom merateľnej funkcie. Uviedli sme niekoľko elementárnych príkladov náhodných premenných. V tejto kapitole sa náhodnými premennými nebudeme viac zaoberať vrátime sa k nim. Jednou so základných pracovných metód v teórii miery je dokazovanie pomocou tzv. najmenšieho $\sigma-$okruhu nad daným systémom množín $\mathscr{D}$. Preto si objasníme najprv túto otázku.

Veta 14 *Nech $\mathscr{D}$ je ľubovoľný neprázdny systém podmnožín množiny X. Potom existuje práve jeden $\sigma-$okruh $\mathscr{S}$ s týmito vlastnosťami:*

1. *$\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$*
2. *Ak $\mathscr{T}$ je $\sigma-$okruh $\mathscr{T} \supset \mathscr{D}$, tak $\mathscr{T} \supset \mathscr{S}$*

Dôkaz. * Systém všetkých podmnožín množiny X je zrejme $\sigma-$okruh obsahujúci $\mathscr{D}$, lenže príliš "rozsiahly". $\mathscr{S}$ má byť $\sigma-$okruh obsahujúci $\mathscr{D}$ a pritom "najmenší". Teda k $\mathscr{D}$ musíme "popridávať"dostatok množín, aby vytvorili $\sigma-$okruh, ale zase nie príliš veľa, len toľko, koľko je nevyhnutne potrebné.
Systém $\mathscr{S}$, o ktorom dokážeme, že má vlastnosti popísané vo vete, budeme definovať nasledujúcim spôsobom. $E \in \mathscr{S}$, ak E patrí do všetkých $\sigma-$okruhov obsahujúcich $\mathscr{D}$. Systém $\mathscr{S}$ je neprázdny, lebo napr. $\emptyset$ patrí do každého $\sigma-$okruhu.
Pre čitateľa zbehlejšieho v teórii množín uvedieme formálnu definíciu:
$\mathscr{S} = \bigcap\{\mathscr{W} : \mathscr{W} \text{je} \sigma - \text{okruh}, \mathscr{W} \supset \mathscr{D}\}$
Systém systémov (množina systémov)
$A = \mathscr{S} = \bigcap\{\mathscr{W} : \mathscr{W} \text{je} \sigma - \text{okruh}, \mathscr{W} \supset \mathscr{D}\}$ je neprázdny, pretože systém 2^X všetkých podmnožín množiny X patrí do neho (2^X je $\sigma-$okruh, $2^X \supset \mathscr{D}$).
Prienik systému A je množina tých množín, ktoré patria do každého systému z

A, teda $E \in \mathscr{S}$ práve vtedy ak E patrí do každého $\sigma-$okruhu obsahujúceho $\mathscr{D}$
1. $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$
Nech $E \in \mathscr{D}$. Potom E patrí do každého $\sigma-$okruhu obsahujúceho $\mathscr{D}$. Teda, podľa deinície, množina E patrí do $\mathscr{S}$
2. $\mathscr{S}$ je $\sigma-$okruh.
Nech $E_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, 2, \cdots)$. To znamená, že E_i $(i = 1, 2, \cdots)$ patrí do každého $\sigma-$okruhu $\mathscr{W}$, ktorý obsahuje $\mathscr{D}$. Pretože $E_i \in \mathscr{W}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ a $\mathscr{W}$ je $\sigma-$okruh, platí $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{W}$. Teda množina $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ patrí do každého $\sigma-$okruhu obsahujúceho $\mathscr{D}$. Preto, podľa definície $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{S}$
Podobne dokážeme, že $\mathscr{S}$ je uzavretý vzhľadom na množinový rozdiel. Nech $E, F \in \mathscr{S}$. To znamená, že E, F sú prvky každého $\sigma-$okruhu $\mathscr{W}$ obsahujúceho $\mathscr{D}$. Preto $E - F \in \mathscr{W}$. vzhˇaldom na to, že $\mathscr{W}$ bol ľubovoľný $\sigma-$okruh nad $\mathscr{D}$, je podľa definície $E - F \in \mathscr{S}$.
3.Ak $\mathscr{T}$ je $\sigma-$okruh, $\mathscr{T} \supset \mathscr{D}$, tak $\mathscr{T} \supset \mathscr{S}$.
Nech $E \in \mathscr{S}$. To znamená, že E patrí do každého $\sigma-$okruhu $\mathscr{W}$ obsahujúceho $\mathscr{D}$, ale $\mathscr{T}$ je jeden z takých $\sigma-$okruhov. Preto množina E patrí aj do $\mathscr{T}$. Teda skutočne $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$
Dokázali sme, že existuje $\sigma-$okruh $\mathscr{S}$ s vlastnosťami 1 a 2. Zostáva nám dokázať, že taký $\sigma-$okruh je jediný. Nech $\mathscr{S}_1$ je $\sigma-$okruh s vlastnosťami 1 a 2. Teda $\mathscr{S}_1$ je $\sigma-$okruh a podľa 1 $\mathscr{S}_1 \supset \mathscr{D}$. Podľa vlastnosti 2 ($\sigma-$okruhu $\mathscr{S}$) je teda $\mathscr{S}_1 \supset \mathscr{S}$. Podobne, $\mathscr{S}$ je $\sigma-$okruh a $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}$. Preto podľa vlastnosti 2 ($\sigma-$okruhu $\mathscr{S}_1$) je $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}$ (aj $\mathscr{S}_1$ je najmenší). Teda $\mathscr{S}_1 \supset \mathscr{S}$ a súčasne $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}$. Preto $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}$ □

Definícia 19 *Nech $\mathscr{D}$ je ľubovoľný neprázdny systém podmnožín množiny X. Najmenším $\sigma-$okruhom $\mathscr{S}(\mathscr{D})$ nad systémom $\mathscr{D}$ rozumieme systém množín s týmito vlastnosťami:*

1. *$\mathscr{S}(\mathscr{D})$ je $\sigma-$okruh, $\mathscr{S}(\mathscr{D}) \supset \mathscr{D}$*
2. *Ak $\mathscr{T}$ je $\sigma-$okruh, $\mathscr{T} \supset \mathscr{D}$, tak $\mathscr{T} \supset \mathscr{S}(\mathscr{D})$*

Čitateľ si teraz iste ľahko sformuluje a možno aj dokáže tvrdenia analogické vete 14 pre algebry, resp. okruhy, resp $\sigma-$algebry.

Definícia 20 *Nech $\mathscr{P}$ je systém všetkých intervalov tvaru $\langle a, b)$, kde $a \leq b$.Znakom $\mathscr{B}$ označíme najmenší $\sigma-$okruh $\mathscr{S}(\mathscr{P})$ nad $\mathscr{P}$. Množiny patriace do $\mathscr{B}$ nazývme borelovské. $\mathscr{B}$ bude označovať systém všetkých borelovských množín.*

Pripomeňme si teraz definíciu vzoru množiny pri zobrazení. Ak $f : M \to N$ a $E \subset N$, potom kladieme $f^{-1}(E) = \{x : f(x) \in E\}$.

Veta 15 *Nech $(X, \mathscr{S})$ je merateľný priestor (t.j. $\mathscr{S}$ je $\sigma-$algebra), $\mathscr{B}$ systém všetkých borelovských množín, $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$, pričom $\mathscr{S}(\mathscr{C}) = \mathscr{B}$. Potom ak f je merateľná funkcia, tak $f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{C}$, a naopak ak $f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{C}$ a navyše $f^{(\{-\infty\})} \in \mathscr{S}$, tak f je merateľná.*

Dôkaz. Nech $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}, \mathscr{S}(\mathscr{C}) = \mathscr{B}, f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{C}$. Dokážeme najprv, že $f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ aj pre všetky $E \in \mathscr{B}$.
Položme $\mathscr{K} = \left\{E \in \mathscr{B} : f^{-1}(E) \in \mathscr{S}\right\}$. Podľa predpokladu $\mathscr{K} \supset \mathscr{C}$.
Dokážeme, že $\mathscr{K}$ je $\sigma-$okruh. Nech $E_i \in \mathscr{K}$ $(i = 1, 2, \cdots)$. Potom $f^{-1}(E_i) \in \mathscr{S}$ $(i = 1, 2, \cdots)$. Pretože $\mathscr{S}$ je $\sigma-$algebra, platí $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i) \in \mathscr{S}$. Preto $\mathscr{K}$ je uzavretý vzhľadom na spočítateľné zjednotenia. Nech $E, F \in \mathscr{K}$. Potom $f^{-1}(E), f^{-1}(F) \in \mathscr{S}$, teda $f^{-1}(E - F) = f^{-1}(E) - f^{-1}(F) \in \mathscr{S}$ a $E - F \in \mathscr{K}$. Teda skutočne je $\mathscr{K}$ $\sigma-$okruh.
Pretože $\mathscr{K} \supset \mathscr{C}$ a $\mathscr{K}$ je $\sigma-$okruh, je $\mathscr{K} \supset \mathscr{S}(\mathscr{C}) = \mathscr{B}$, teda $f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{B}$.
Položme $\mathscr{C}_0 = \{(-\infty, c) : c \text{ reálne číslo}\}$. Dokážeme, že $\mathscr{S}(\mathscr{C}_0) = \mathscr{B}$, t.j. $\mathscr{S}(\mathscr{C}_0) = \mathscr{S}(\mathscr{P})$, kde $\mathscr{P}$ je systém všetkých intervalov tvaru $\langle a, b)$.
Predovšetkým $\mathscr{S}(\mathscr{C}_0) \supset \mathscr{P}$, pretože $\langle a, b) = (-\infty, b) - (-\infty, a)$, teda každá

množina z $\mathscr{P}$ je rozdielom dvoch množín z $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{S}(\mathscr{C}_0)$, čiže patrí tiež do $\mathscr{S}(\mathscr{C}_0)$ ($\mathscr{S}(\mathscr{C}_0)$ je $\sigma-$okruh). pretože $\mathscr{S}(\mathscr{C}_0)$ je $\sigma-$okruh nad $\mathscr{P}$ a $\mathscr{S}(\mathscr{P})$ je najmenší $\sigma-$okruh nad $\mathscr{P}$, je $\mathscr{S}(\mathscr{P}) \subset \mathscr{S}(\mathscr{C}_0)$. K tomu, aby sme dostali opačnú inklúziu opäť stačí dokázať, že $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{S}(\mathscr{P})$ (potom $\mathscr{S}(\mathscr{P})$ ako $\sigma-$okruh nad $\mathscr{C}_0$ obsahuje najmenší $\sigma-$okruh $\mathscr{S}(\mathscr{C}_0)$ nad $\mathscr{C}_0$). Nech teda $(-\infty, c) \in \mathscr{C}_0$. Ľahko dokážeme, že $(-\infty, c) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \langle c-n, c)$. Pretože množiny $\langle c-n, c)$ sú z $\mathscr{P} \subset \mathscr{S}(\mathscr{P})$ a $\mathscr{S}(\mathscr{P})$ je $\sigma-$okruh, je tiež $(-\infty, c) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \langle c-n, c) \in \mathscr{S}(\mathscr{P})$. Nech teda f je merateľná funkcia. podľa definície je $f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{C}_0$. Podľa prvej časti dôkazu je tiež $f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{S}(\mathscr{C}_0) = \mathscr{B}$, preto $f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{B}$.
Naopak nech $f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{C}$. Potom $f^{-1}(E)\mathscr{S}$ aj pre všetky $E \in \mathscr{S}(\mathscr{C}) = \mathscr{S}(\mathscr{C}_0)$. vzhľadom na to, že $f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{C}_0, f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{S}$, je
$\{x : f(x) < c\} = f^{-1}(\{-\infty\}) \cup f^{-1}((-\infty, c)) \in \mathscr{S}$ pre každé reálne číslo c. $\square$

Dôsledok 1 *Konečná funkcia f je merateľná vtedy a len vtedy, keď $f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{C}$. Špeciálne konečná funkcia f je merateľná vtedy a len vtedy, keď $f^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky borelovské množiny E*

Veta 15 má mnohé aplikácie. Napr. za $\mathscr{C}$ môžeme vziať systém $\mathscr{P}$ alebo systém množín typu $(-\infty, c\rangle$ resp. (c, ∞) a pod. Teda f je merateľná napr. vtedy ak je konečná a $\{x : f(x) > c\} \in \mathscr{S}$ pre všetky $c \in \mathbb{R}$

OPERÁCIE S M. FUNKCIAMI

V tomto paragrafe budeme predpokladať, že všetky funkcie, o ktorých uvažujeme sú konečné. V opačnom prípadeč zdôrazníme, že pripúšťame aj nevlastné hodnoty. Inokedy zase zdôrazníme, že pracujeme len s konečnými funkciami.

Veta 16 *Ak f, g sú konečné merateľné funkcie tak je aj funkcia $f+g$ merateľná.*

Dôkaz. Stačí dokázať, že $(f+g)^{-1}((-\infty, c)) \in \mathscr{S}$ pre všetky reálne čísla c. Nech $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť všetkých racionálnych čísel. Potom
$\{x : f(x)+g(x)<c\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\{x : f(x)<r_n\} \cap \{x : g(x)<c-r_n\})$
Skutočne nech $f(x)+g(x)<c$, teda $f(x)<c-g(x)$. Medzi každé dve čísla sa dá "vsunúť"racionálne číslo. Existuje teda také prirodzené číslo n, že $f(x)<r_n<c-g(x)$. Platí teda súčasne $f(x)<r_n$ (t.j. $x \in \{t : f(t)<r_n\}$) a $g(x)<c-r_n$ (t.j. $x \in \{t : g(t)<c-r_n\}$), teda do celého zjednotenia vpravo. Opačná inklúzia je zrejmá. Tvrdenie vety teraz vyplýva z dokázanej rovnosti, z toho, že f, g sú merateľné a z toho, $\mathscr{S}$ je $\sigma-$algebra. □

Veta 17 *Ak sú f, g konečné merateľné funkcie, α reálne číslo, tak sú merateľné aj funkcie $\alpha f, |f|, f^2, f \cdot g, f \cup g = \max(f,g), f \cap g = \min(f,g), f^+ = \max(f,0), f^- = \max -f, 0$.*

Dôkaz. Je zrejmé, že funkcia $h=0$ je merateľná ($h^{-1}(F)$ je alebo $\emptyset$ alebo X), preto αf je merateľná, ak $\alpha=0$. Ak $\alpha \neq 0$ máme:
$\{x : \alpha f(x)<c\} = \left\{x : f(x)<\frac{c}{\alpha}\right\}$, v prípade, že $\alpha>0$
$\{x : \alpha f(x)<c\} = \left\{x : f(x)>\frac{c}{\alpha}\right\}$, v prípade, že $\alpha<0$
V oboch prípadoch $(\alpha f)^{-1}((-\infty, c)) \in \mathscr{S}$, teda αf je merateľná. Pokiaľ ide o $|f|$ resp. f^2 platí:
$\{x : |f|<c\} = \{x : f(x)<c\} \cap \{x : f(x)>-c\} \in \mathscr{S}$
$\left\{x : f^2(x)<c\right\} = \{x : |f(x)|<\sqrt{c}\} \in \mathscr{S}$ ak $c>0$
$\left\{x : f^2(x)<c\right\} = \emptyset \in \mathscr{S}$, ak $c \leq 0$
Zvyšné prípady prevedieme na predchádzajúce. Platí totiž
$f \cdot g = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$
$f \cup g = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$
$f \cap g = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$
$f^+ = f \cup 0, f^- = (-f) \cup 0$ □

Odporúčame čitateľovi, aby sa zamyslel nad funkciami f^+ a f^-, pretože neskôr ich budeme hodne používať. Funkciu f^+ zostrojíme z f tak, že ponecháme tie hodnoty, v ktorých je funkcia f kladná, inde je $f^+(x)=0$, teda

$$f^+(x)=f(x), \text{ ak } f(x)>0, f^+(x)=0, \text{ ak } f(x) \leq 0$$

Naproti tomu

$$f^-(x)=0, \text{ ak } f(x) \geq 0, f^-(x)=-f(x), \text{ ak } f(x)<0$$

Funkcia f^- vznikne z funkcie f tak, že tú časť funkcie f, ktorá je pod osou preklopíme. Inde sa $f^-=0$. Ľahko sa dokážu nasledujúce dve nerovnosti, ktoré sa nám často zidu:

$$f=f^+-f^-, |f| f^+ + f^-$$

Nakoniec aspoň v krátkosti rozoberme prípad keď niektorá z funkcií f, g má nekonečné hodnoty. Vetu 16 možno vysloviť napr. aj takto:
Nech f, g sú merateľné funkcie a súčet $f(x) + g(x)$ je definovaný pre všetky $x \in X$. Potom je funkcia $f + g$ merateľná.
Skutočne, množina $\{x : f(x) + g(x) < c\} \in \mathscr{S}$;dôkaz je ten istý ako v prípade konečnosti funkcií f, g.
Podobne možno upraviť aj vetu 17. Napr. tvrdenie, že funkcie f^+, f^- sú merateľné v prípade, že je f merateľná je pravdivé aj pre nekonečné funkcie, pretože $\{x : f^+(x) = -\infty\} = \emptyset, \{x : f^-(x) = -\infty\} = \emptyset$

POSTUPNOSTI M. FUNKCIÍ

Definícia 21 *Funkcia f definovaná na merateľnom priestore $(X, \mathscr{S})$ sa nazýva jednoduchá ak existuje také $E_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, že f je konštantná na každej množine E_i(t.j. $f(x) = \alpha_i$ pre $x \in E_i$) a na množine $X - \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ sa funkcia f rovná nule.*

Môžeme zaviesť ešte iné označenie. Predovšetkým možno predpokladať, že E_i sú navzájom disjunktné. Potom $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, kde χ_{E_i} je charakteristická funkcia (indikátor) množiny E t.j. $\chi_E(x) = 1$ ak $x \in E, \chi_E(x) = 0$, ak $x \notin E$
V tomto paragrafe okrem iného dokážeme, že každá merateľná funkcia je limitou postupnosti jednoduchých funkcií, a naopak, limita postupnosti jednoduchých funkcií (ba čo viac - merateľných funkcií) je merateľná funkcia.
Zopakujme si ešte definíciu supréma neprázdnej číselnej množiny M $(\sup(M))$. Ak M je zhora neohraničená, kladieme $\sup(M) = \infty$. Keď $M \subset R_1^*$ a $\infty \in M$, je tiež $\sup(M) = \infty$;$\sup(M) = -\infty$, ak $M = \{-\infty\}$. Podobne sa definuje infimum množiny $M(\inf(M))$

Veta 18 *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť merateľných funkcií. Potom sú merateľné aj funkcie g, h definované rovnosťami*

$$h(x) = \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \cdots\}$$

$$g(x) = \inf\{f_n(x) : n = 1, 2, \cdots\}$$

Dôkaz. Pre každé reálne číslo c platí:

$$\{x : h(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \leq c\} \in \mathscr{S}$$

Pretože $\{x : h(x) \leq c\}$ podľa vety 15 (množiny $(-\infty, c)$ totiž "vytvárajú"systém $\mathscr{B}$ a $\{x : h(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) = -\infty\}$).
Merateľnosť funkcie g možno dokázať podobne. Vyplýva aj zo vzťahu

$$g(x) = -\sup\{-f_n(x) : n = 1, 2, \cdots\}$$

a z vety 17 □

Nasledujúca definícia obsahuje trochu neobvyklý, ale pre naše účely vhodný spôsob zavedenia $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ (Inak symbol $n \to \infty$ budeme občas aj vynechávať.)

Definícia 22 *Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je číselná postupnosť. Potom $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{i\geq n} a_i$, a $\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{i\geq n} a_i$.*

Veta 19 *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť merateľných funkcií. Potom sú merateľné aj funkcie g, h definované rovnosťami*
$g(x) = \limsup f_n(x), h(x) = \liminf f_n(x)$.

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z definície $\limsup, \liminf$ a z vety 18 □

Dôsledok 2 *Limita postupnosti merateľných funkcií je merateľná funkcia.*

Dôkaz. Vyplýva z rovnosti $\lim f_n(x) = \limsup f_n(x)$. Túto rovnosť stačí dokázať pre číselné postupnosti. Predpokladajme, že existuje $\lim a_n = a$ vlastná alebo nevlastná. Položme $b = \limsup a_n$. Ak je $a \in R_1$, tak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také n_0, že pre všetky $i \geq n_0$ platí:

$$a_i \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

teda pre všetky $n \geq n_0$ platí tiež

$$\sup_{i \geq n} a_i \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$$

Pretože

$$\sup_{i \geq 1} a_i \geq \sup_{i \geq 2} a_i \geq \cdots \geq \sup_{i \geq n} a_i \geq \cdots$$

platí:

$$b = \inf_{n \geq 1} \sup_{i \geq n} a_i \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$$

Dostali sme teda nerovnosť $a - \varepsilon \leq b \leq a + \varepsilon$, t.j. $|a - b| \leq \varepsilon$. Pretože posledná nerovnosť platí pre každé $\varepsilon > 0$, dostávame rovnosť $a = b$.
Keď $a = \infty$ alebo $a = -\infty$ postupujeme podobne. Napr. ak $\lim a_n = \infty$, tak k ľubovoľnému K existuje také n, že pre všetky $i \geq n$ je $a_i > K$. Podobne ako predtým dostaneme, že $\sup_{i \geq n} a_i > K$ pre všetky n, teda $b = \inf_{n \geq 1} \sup_{i \geq n} a_i \geq K$, pre každé K, platí, že $b = \infty$ □

Veta 20 *K ľubovoľnej merateľnej funkcii f existuje taká postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoduchých funkcií, že $f = \lim f_n$ (t.j. $f(x) = \lim f_n(x)$ pre všetky $x \in X$). Ak je $f \geq 0$, môžeme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ zostrojiť tak, aby bola neklesajúca, pričom*

$$f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}, \text{ ak } x \in E_i = f^{-1}\left(\left\langle \frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right)\right), (i = 1, \cdots n2^n)$$

$$f_n(x) = n, \text{ ak } x \in E = \{t : f(t) \geq n\}$$

Dôkaz. * Nech $f \geq 0$, definujme f_n tak ako je to vo vete.
1.$f_n \geq f_{n+1}$
Ak $f(x) \geq n$, tak $f_n(x) = n$. Pokiaľ ide o $f_{n+1}(x)$, máme dve možnosti. Ak $f(x) \geq n + 1$, tak $f_{n+1}(x) = n + 1 > n = f_n(x)$. V opačnom prípade je $n \leq f(x) < n + 1$, teda $f(x) \in \left\langle \frac{i-1}{2^{n+1}}, \frac{i}{2^{n+1}} \right)$, kde $\frac{i-1}{2^{n+1}} \geq n$ (celý uvedený $i-$ty interval je časťou intervalu $\langle n, n + 1)$).
Teda

$$f_{n+1}(x) = \frac{i-1}{2^{n+1}} \geq n = f_n(x)$$

Nech $f(x) < n$, napr. $\frac{i-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{i}{2^{n+1}}$, kde $1 \leq i \leq n2^{n+1}$ potom $f_{n+1}(x)$ Pokiaľ ide o $f_n(x)$ môžu natať vda prípady podľa toho, či je i párne alebo nepárne. Situáciu si môžeme názorne predstaviť. Nech funkcia $f(x)$ sa nachádza v akomsi $k-$tom intervale pri $n-$tom delení. Tento interval rozdelíme na polovice. Tým dostaneme dva intervaly z $(n + 1)$ $-$ho delenia. V jednom z nich sa nachádza $f(x)$. Tento interval sme označili $\left\langle \frac{i-1}{2^{n+1}}, \frac{i}{2^{n+1}} \right)$. Ak je to "horný" interval, tak $i = 2k$. Ak je to "dolný" interval, tak $2\,(k - 1) = i - 1$, čiže $i = 2k - 1$
V prvom prípade (i párne, $i = 2k$)je:

$$f_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = \frac{i-1}{2^{n+1}}, \text{ lebo } \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{2k}{2^{2^{n+1}}} = \frac{k}{2^n}$$

teda $f_n(x) < f_{n+1}(x)$
V druhom prípade (i je nepárne, $i = 2k - 1$)platí $\frac{i-1}{2^{n+1}} = \frac{2k-2}{2^{n+1}} = \frac{k-1}{2^n}$, pričom $\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$, odkiaľ vyplýva, že $f_{n+1}(x) = f_n(x)$
2.$f(x) = \lim f_n(x)$
Ak $f(x) = \infty$, tak $f(x) \geq n$ pre všetky n, teda $f_n(x) = n$, odkiaľ vyplýva, že $\lim f_n(x) = \infty = f(x)$.

Nech $f(x) < \infty$ a $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo. Zvoľme prirodzené číslo N tak, aby $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Nech $n > N, x \in E_i$, potom

$$f_n(x) = \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}$$

teda

$$|f(x) - f_n(x)| = f(x) - f_n(x) < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \varepsilon$$

Teda k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také N, že pre všetky $n > N$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, čo znamená, že $f(x) = \lim f_n(x)$
Ak je f ľubovoľná merateľná funkcia, tak $f = f^+ - f^-$, kde f^+, f^- sú nezáporné merateľné funkcie. Preto podľa dokázaného existujú také postupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, resp. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednnoduchých funkcií, že $f^+(x) = \lim f_n(x), f^-(x) = \lim g_n(x)$, teda $f(x) = \lim (f_n(x) - g_n(x))$, pričom $f_n - g_n$ sú jednoduché funkcie $(n = 1, 2, \cdots)$ □

CVIČENIA

1. Označme systém všetkých intervalov tvaru $(-\infty, c)$ znakom $\mathscr{C}_1$, tvaru $(-\infty, d)$, d je racionálne číslo znakom $\mathscr{C}_2$, tvaru $(-\infty, c\rangle$ znakom $\mathscr{C}_3$, tvaru (c, ∞) znakom $\mathscr{C}_4$, tvaru $\langle c, \infty)$ znakom $\mathscr{C}_5$, tvaru $\langle a, b)$ znakom $\mathscr{C}_6$, tvaru $(a, b\rangle$ znakom $\mathscr{C}_7$, tvaru $\langle a, b\rangle$ znakom $\mathscr{C}_8$, tvaru (a, b) znakom $\mathscr{C}_9$, kde a, b, c sú reálne čísla. Dokážte, že $\mathscr{S}(\mathscr{C}_i) = \mathscr{B}, i = 1, 2, \cdots 9$

2. Aplikujte vetu 15 na systémy C_i z cvičenia 1.

3. Veta o supréme hovorí: Každá neprázdna zhora ohraničená množina má suprémum. Dokážte pomocou tejto vety, že každá neklesajúca ohraničená postupnosť má limitu.

   Návod 4 Je to suprémum množiny hodnôt tej postupnosti.

4. Definujte infimum a dokážte vetu analogickú vete z cvičenia 3.

5. Nech M je ľubovoľná ohraničená číselná množina. Položme $-M = \{x : -x \in M\}$. Dokážte, že $\sup(-M) = -\inf(M), \inf(-M) = -\sup(M)$.

6. Číslo α sa nazýva bodom zhustenia postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak k ľubovoľnému okoliu $U = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ čísla α a k ľubovoľnému n existuje také $m > n$, že $a_m \in U$. Symbol ∞ (resp. $-\infty$) je bodom zhustenia postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zhora (resp. zdola) neohraničená. Dokážte, že každá postupnosť má aspoň jeden bod zhustenia.

   Návod 5 Ak všetky členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú v intervale $\langle c, d\rangle$, tak postupným delením na polovice dostaneme postupnosť $\langle c_n, d_n\rangle$ intervalov obsahujúcich nekonečne veľa členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; číslo $\lim c_n$ je bodom zhustenia postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

7. Dokážte, že $\limsup a_n$ je suprémum množiny bodov zhustenia postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

8. Dokážte tvrdenie analogické k tvrdeniu z cvičenia 7 pre $\liminf a_n$.

9. Dokážte, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná vtedy a len vtedy, keď je ohraničená a $\liminf a_n = \limsup a_n$

10. Sformulujte a dokážte vetu o existencii najmenšieho okruhu (algebry, $\sigma-$algebry) nad daným systémom.

11. Nech $\mathscr{D}$ je systém podmnožín množiny $X, X \in \mathscr{D}$. Dokážte, že najmenší okruh nad $\mathscr{D}$ sa zhoduje s najmenšou algebrou nad $\mathscr{D}$.

12. Dokážte, že najmenší $\sigma-$okruh nad algebrou $\mathscr{D}$ sa rovná najmenšej $\sigma-$algebre nad $\mathscr{D}$.

13. Nech $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je priestor miery, f je merateľná funkcia. Definujme na $\sigma-$algebre $\mathscr{B}$ všetkých borelovských množín funkciu ν rovnosťou $\nu(E) = \mu\big(f^{-1}(E)\big)$.Dokážte, že takto definovaná funkcia ν je miera.

ABSTRAKTNÝ INTEGRÁL A STREDNÁ HODNOTA

DEFINÍCIA INTEGRÁLU

Čitateľovi je iste aspoň intuitívne známy pojem určitého integrálu (presné zavedenie nasleduje). Ide napr. o určenie plošného obsahu rovinného obrazca ohraničeného grafom funkcie f, osou x a priamkami $x = a, x = b$. Tento obsah pri tom beriem kladne ak graf funkcie prebieha nad osou x, záporne pod osou x. Preto bude iste jasná nasledujúca definícia integrálu (zatiaľ len veľmi špeciálnych funkcií) v ľubovoľnom priestore.

Definícia 23 *Nech X je ľubovoľná neprázdna množina, $\mathscr{R}$ je okruh podmnožín množiny X, μ miera definovaná na $\mathscr{R}$. Reálnu funkciu f definovanú na X nazývame jednoducho integrovateľnou, ak $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, kde α_i sú reálne čísla, E_i sú navzájom disjunktné množiny z $\mathscr{R}$ a $\mu(E_i) < \infty\, (i = 1, 2, \cdots, n)$. Integrál definujeme vzťahom*

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

Všimnime si, že funkcia $f = 0$ je jednoducho integrovateľná a $\int f \mathrm{d}\mu = 0$, pretože $f = \chi_\emptyset$ a $1 \cdot \mu(\emptyset) = 0$.
Pojem integrálu úzko súvisí s pojmom strednej hodnoty náhodnej premennej. Nech $(\Omega, \mathscr{S}, P)$je pravdepodobnostný priestor jednoducho integrovateľné (t.j. jednoduché) funkcie definované na Ω sa nazývajú tiež diskrétne náhodné premenné. Nech hodnoty diskrétnej náhodnej premennej f sú čísla $x_1, x_2, \cdots, x_n$ a pravdepodobnosť, že f nadobudne hodnotu x_i je p_i, potom *strednú hodnotu* definujeme vzťahom

$$E(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Ale p_i sa vlastne rovná číslu $P\big(f^{-1}(\{x_i\})\big) = P(E_i)$, teda

$$E(f) = \int f \mathrm{d}P$$

Na tomto príklade sme chceli len poukázať na to, že v definíciu strednej hodnoty možno v diskrétnom (a ako ukážeme neskôr nielen v diskrétnom) prípade vyjadriť pomocou integrálu. Preto podobne ako v predchádzajúcej kapitole, nebudeme ďalej venovať pozornosť pravdepodobnostnému aspektu, ale vybudujeme teóriu integrálu. Táto teória nám umožní okrem iného aj definovať stredné hodnoty zložitejších náhodných premenných ako sú diskrétne. K niektorým pravdepodobnostným otázkam sa vrátime už v nasledujúcej kapitole.
Integrál budeme definovať v nasledujúcich dvoch definíciách. Korektnosť týchto definícií preveríme z metodických príčin až v ďalšom paragrafe. Predpoklady o $X, \mathscr{R}, \mu$ nebudeme opakovať. Opäť však zdôrazňujeme, že slovom funkcia budeme rozumieť ľubovoľnú funkciu s hodnotami v R_1^* (teda aj s nekonečnými hodnotami). Keď hodnoty nejakej funkcie budú z R_1 (teda konečné), budeme hovoriť, že táto funkcia je konečná.

Definícia 24 *Budeme hovoriť, že funkcia f definovaná na X patrí do triedy P^+ $(f \in P^+)$, ak existuje taká neklesajúca postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných jednoduchých funkcií, že $f(x) = \lim f_n(x)$ pre všetky $x \in X$ (krátko budeme zapisovať $f_n \nearrow f$) a postupnosť $\left\{\int f_n \mathrm{d}\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Pritom definujeme:*

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Definícia 25 *Reálna funkcia f definovaná na X sa nazýva integrovateľná, ak existujú také funkcie $g, h \in P^+$, že*

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

pre všetky x, pre ktoré je $g(x) - h(x)$ definovaný. Integrál z funkcie f definujeme vzťahom

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu - \int h \mathrm{d}\mu$$

Pretože slovné vyjadrenie "$f(x) = g(x) - h(x)$ pre všetky x, pre ktoré je $g(x) - h(x)$ definovaný", je trochu ťažkopádne, zavádzame túto dohodu budeme písať $f = g - h$, ak $f(x) = g(x) - h(x)$ pre všetky x, pre ktoré je $g(x) - h(x)$ definovaný. Pretože takáto dohoda nie je bežná, budeme ju používať zväčša len v dôkazoch, kde by sme sa bez nej museli vyjadrovať veľmi ťažkopádne.

Zápis $\int f \mathrm{d}\mu$ sa čitateľovi môže zdať nezvyklý. Pretože integrujeme cez celý priestor, mohli by sme písať aj $\int\limits_X f \mathrm{d}\mu$. Napríklad, ak za X vezmeme interval $(-\infty, \infty)$, μ Lebesguovu mieru definovanú na okruhu $\mathscr{R}$ v definícii 15, tak ide o integrál $\int\limits_{(-\infty,\infty)} f \mathrm{d}\mu$ označovaný tiež znakom $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Ak chceme počítať integrál $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, čo býva najčastejšie, môžeme postupovať naledujúcim spôsobom. Definujeme funkciu g takto: $g(x) = f(x)$, ak $x \in \langle a, b\rangle$, $g(x) = 0$, ak $x \notin \langle a, b\rangle$. (Alebo inak $g = f\chi_{\langle a,b\rangle}$.) Potom obsah obrazca vytvoreného funkciou f v hraniciach $\langle a, b\rangle$ sa rovná obsahu obrazca vytvoreného funkciou g, teda $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}x$. Inokedy možno z metodických príčin vziať za základný priestor X interval $\langle a, b\rangle$ alebo $\langle a, b)$. Pravda, touto otázkou sa budeme ešte podrobnejšie a presnejšie zaoberať. Zatiaľ sme len chceli čitateľa ubezpečiť o tom, že úplne postačí, ak vybudujeme teóriu integrálu na celom priestore X.
Vážnejšia pripomienka by sa mohla týkať definície integrálu. Treba dokázať tieto dve veci:

1. Ak $f \in P^+, f_n \nearrow f, g_n \nearrow f$, pričom je splnený predpoklad o ohraničenosti integrálov a f_n resp. g_n sú nezáporné jednoducho integrovateľné, tak
$$\lim \int f_n \mathrm{d}\mu = \lim \int g_n \mathrm{d}\mu$$

2. Ak je f integrovateľná $f = g_1 - h_1 = g_2 - h_2$, kde $g_i, h_i \in P^+\,(1, 2)$, tak
$$\int g_1 \mathrm{d}\mu - \int h_1 \mathrm{d}\mu = \int g_2 \mathrm{d}\mu - \int h_2 \mathrm{d}\mu$$

Tieto dva fakty dokážeme v nasledujúcom paragrafe. V tomto pragrafe si ešte osvetlíme definíciu na dvoch príkladoch.

Príklad 1 Podľa uvedenej definície vypočítajme $\int\limits_0^1 x\mathrm{d}x$ alebo v inom zápise $\int x\chi_{\langle 0,1)}(x)\mathrm{d}x = \int f\chi_{\langle 0,1)}(x)\mathrm{d}\mu$, kde μ je Lebesguova miera, $f(x) = x$ pre všetky x (Z geometrického hľadiska ide o výpočet obsahu pravouhlého trojuholníka, ktorého obidve odvesny majú dĺžku 1. Obsah tohto trojuholníka je $\frac{1}{2}$). Dokážeme dokonca, že $g = f\chi_{\langle 0,1)} \in P^+$. Definujme postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá konverguje ku g. Rozdelíme interval $\langle 0, 1)$ na dve "rovnaké"časti. V každej z nich je f_1 konštantná a rovná sa minimálnej hodnote funkcie f. Presnejšie: $f_1(x) = 0$, ak $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right)$, $f_1(x) = \frac{1}{2}$, ak $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right)$. Potom rozdelíme interval $\langle 0, 1)$ na $4 = 2^2$ rovnakých častí (t.j. každý z dielikov rozdelíme na polovicu) a postupujeme podobne $f_2(x) = \frac{i-1}{2^2}$, ak $x \in \left\langle \frac{i-1}{2^2}, \frac{i}{2^2}\right)$, $\left(1, 2, \cdots 2^2\right)$.
Teraz už vidno ako treba postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovať:
$f_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$, ak $x \in \left\langle \frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)$, $(i = 1, \cdots, 2^n)$
$f_n(x) = 0$, ak $x \notin \langle 0, 1)$.
Pretože $\lim f_n(x) = g(x)$ pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$, $f_n \le f_{n+1}\,(1, 2, \cdots)$ a $\int f_n \mathrm{d}\mu < 1\,(n = 1, 2, \cdots)$, platí (ak $2^n = m$)

$\int\limits_0^1 x\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{2^n}\left(\frac{i}{2^n} - \frac{i-1}{2^n}\right) = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{i-1}{m}\frac{1}{m} =$
$\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{m-1} i = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m^2}(1+m-1)\frac{m-1}{2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{m\to\infty} \frac{m(m-1)}{m^2} = \frac{1}{2}$

Príklad 2 Vypočítajte $\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x$. Podobne ako v predchádzajúcom príklade definujeme: $f_n(x) = \left(\frac{i-1}{2^n}\right)^2$, ak $x \in \left\langle \frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) (1, 2, \cdots, 2^n), f_n(x) = 0$, ak $x \notin \langle 0, 1)$ Preto

$$\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{i-1}{2^n}\frac{1}{2^n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{m^3} \sum_{i=1}^{m-1} i^2$$

Pretože

$$\sum_{i=1}^{p} i^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

platí:

$$\int\limits_0^1 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^3} \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} = \frac{1}{3}$$

Záverom by sme ešte radi ukázali, ako sa robí "praktický"výpočet integrálu na číselnej osi. Pritom $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ je definovaný ako $\int f\chi_{\langle\rangle}\mathrm{d}\mu$, kde μ je Lebesguova miera. V prípade, že f nie je definovaná mimo $\langle a, b)$, položíme $f(x) = 0$ pre $x \notin \langle a, b)$. Predpokladáme, že čitateľ pozná pojem primitívnej funkcie F k funkcii f. Funkcia F je primitívna k funkcii f na (a, b), ak $F'(x) = f(x)$ pre všetky $x \in (a, b)$.

Veta 21 *Nech f, F sú funkcie spojité na $\langle a, b\rangle$ a F je primitívna funkcia k funkcii f na (a, b). Potom $\int\limits_{\langle a,b)} f\mathrm{d}\mu \left(= \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)$ existuje a platí*

$$\int\limits_{\langle a,b)} f\mathrm{d}\mu = F(b) - F(a)$$

Poznámka 3 Uvedená veta je čiteteľovi pravdepodobne dobre známa (z teórie Riemannovho integrálu). V príklade 2 je teda k funkcii x^2 primitívna $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Preto

$$\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Dôkaz. Predpokladajme, že funkcia f je nezáporná, inak by sme vzali funkciu $f - m$, kde m je minimum funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Vezmime $\delta > 0$ tak, aby platila implikácia

$$|u - v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Urobme teraz také delenie intervalu $\langle a, b\rangle$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k$$

aby $x_i - x_{i-1} < \delta, i = 1, \cdots, k$. Označme

$$m_i = \min\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$$

$$M_i = \max\{f(x) : x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle\}$$

a položme

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} m_i \chi_{\langle x_{i-1}, x_i)}$$

$$h(x) = \sum_{i=1}^{k} M_i \chi_{\langle x_{i-1}, x_i)}$$

Dostaneme nerovnosti

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), x \in \langle a, b \rangle$$

teda

$$\alpha = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b h(x)\mathrm{d}x = \beta$$

Navyše $M_i - m_i \leq \delta \, (i = 1, 2, \cdots, k)$
$\beta - \alpha = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} M_i \, (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{k} m_i \, (x_i - x_{i-1}) =$
$\sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i) \, (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{k} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$
Na druhej strane podľa vety o strednej hodnote existuje pre každé i také $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, že $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i) \, (x_i - x_{i-1}) = f(c_i) \, (x_i - x_{i-1})$.
Preto $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{k} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{k} f(c_i) \, (x_i - x_{i-1}) \leq$
$\sum_{i=1}^{k} M_i \, (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x = \beta$

Podobne sa dokáže nerovnosť $F(b) - F(a) \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \alpha$.Obe čísla, tak $F(b) - F(a)$ ako aj $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sa nachádzajú v intervale $\langle \alpha, \beta \rangle$, pričom $\beta - \alpha < \varepsilon$. Máme teda nerovnosť

$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (F(b) - F(a)) \right| < \varepsilon$$

Keďže táto nerovnosť platí pre každé $\varepsilon > 0$, výraz v absolútnej hodnote sa rovná nule, teda

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

□

V dôkaze sme mlčky predpokladali, že ku každej funkcii spojitej na intervale $\langle a, b \rangle$ existuje primitívna funkcia. Toto tvrdenie možno azda považovať za známe.

KOREKTNOSŤ. LINEÁRNOSŤ

A. Korektnosť

Lema 3 *Nech* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{F_j}, E_i \in \mathscr{R}, \mu(E_i) < \infty \, (i = 1, \cdots, n), F_j \in \mathscr{R}, \mu(F_j) < \infty \, (j = 1, \cdots, m), E_i \cap F_j = \emptyset, F_i \cap F_j = \emptyset \, (i \neq j)$. *Potom* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(F_j)$.

Dôkaz. Môžeme predpokladať, že všetky α_i, β_j sú rôzne od nuly. V tom prípade je $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{m} F_j$. Pretože F_j sú disjunktné a $E_i = \bigcup_{j=1}^{m} (E_i \cap F_j)$, je $\sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j) = \mu(E_i) \, (i = 1, \cdots, n)$. Podobne $\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j) = \mu(F_j) \, (j = 1, \cdots, m)$. Množina $E_i \cap F_j$ je alebo prázdna, alebo $\alpha_i = \beta_j$. V každom prípade teda $\alpha_i \mu(E_i \cap F_j) = \beta_j \mu(E_i \cap F_j)$. Preto $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(F_j)$ □

Tým sme dokázali korektnosť integrálu z jednoducho integorvateľných funkcií. Pre funkcie $f \in P^+$ to bude trochu komplikovanejšie. Pôjde o celú sériu pomocných viet.

Lema 4 *Ak f, g sú jednoducho integrovateľné, tak aj $f + g$ je jednoducho integrovateľná a platí*

$$\int (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \int g \mathrm{d}\mu$$

Dôkaz. Predovšetkým môžeme predpokladať, že f a g sú konštantné na tých istých množinách. (Stačí vziať množiny $E_i \cap F_j$.) Nech teda $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}, g = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{E_i}, E_i \in \mathscr{R}, \mu(E_i) < \infty \, (i = 1, \cdots, n), E_i \cap E_j = \emptyset \, (i \neq j)$. Potom $f + g = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i}$, teda $f + g$ je jednoducho integrovateľná a platí:
$\int (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu(E_i) = \int f \mathrm{d}\mu + \int g \mathrm{d}\mu$ □

Lema 5 *Nech f, g sú jednoducho integrovateľné funkcie, $f \leq g$. Potom* $\int f \mathrm{d}\mu \leq \int g \mathrm{d}\mu$

Dôkaz. Opäť nech
$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}, g = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_{E_i}, E_i \in \mathscr{R}, \mu(E_i) < \infty \, (i = 1, \cdots, n)$. Je zrejmé, že $\alpha_i \leq \beta_i \, (i = 1, \cdots, n)$, teda $\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu(E_i) = \int g \mathrm{d}\mu$ □

Lema 6 *Ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť jednoducho integrovateľných funkcií, $f_n \searrow 0$ [t.j. $f_n \geq f_{n+1} \, (n = 1, 2, \cdots), \lim f_n(x) = 0$ pre všetky x], tak* $\lim \int f_n \mathrm{d}\mu = 0$

Dôkaz. Nech $f_1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}$. Potom $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right) < \infty$. Položme $E = \bigcup_{i=1}^{k} E_i, M = \max f_1$. Vezmimme ľubovoľné kladné číslo ε a položme

$$G_n = \{x : f_n(x) \geq \varepsilon\}$$

. Je zrejmé, že $G_n \in \mathscr{R}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Pretože $f_n \searrow 0$, je $G_n \supset G_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$. Okrem toho $\mu(G_n) \leq \mu(G_1) \leq \mu(E) < \infty$ preto podľa vety 13 platí:

$$\lim \mu(G_n) = 0.$$

Pretože $f_n(x) = 0$ pre $x \notin E$, podľa liem 4 a 5 platí:

$$\begin{aligned} 0 = \int 0 \mathrm{d}\mu \leq \int f_n \mathrm{d}\mu = & \\ & = \int f_n \chi_{G_n} \mathrm{d}\mu + \int f_n \chi_{E-G_n} \mathrm{d}\mu + \int f_n \chi_{X-E} \mathrm{d}\mu \leq \\ & \leq \int f_1 \chi_{G_n} \mathrm{d}\mu + \int \varepsilon \chi_{E-G_n} \mathrm{d}\mu + \int 0 \mathrm{d}\mu \leq \\ & \leq M\mu(G_n) + \varepsilon\mu(E - G_n) \leq \\ & \leq M\mu(G_n) + \varepsilon\mu(E) \end{aligned}$$

Podľa nášho predpokladu a lemy 5 je postupnosť $\left\{\int f_n \mathrm{d}\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ nerastúca a zdola ohraničená, teda existuje $\lim \int f_n \mathrm{d}\mu$. Odtiaľ a z uvedených vzťahov vyplýva:

$$0 \leq \lim \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon\mu(E)$$

Pretože posledná rovnosť platí pre každé $\varepsilon > 0$, platí tiež rovnosť $\lim \int f_n \mathrm{d}\mu = 0$. □

Lema 7 *Nech $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť jednoducho integrovatreľných funkcií $g_n \nearrow g, f$ je jednoducho integrovateľná funkcia a $f \leq g$. Potom*

$$\int f \mathrm{d}\mu \leq \lim \int g_n \mathrm{d}\mu$$

Dôkaz. Zrejme $\min(f, g_n) \nearrow \min(f, g) = f$, teda $f - \min(f, g_n) \searrow 0$. Preto podľa liem 6 a 5 platí: $\int f \mathrm{d}\mu \lim \int \min(f, g_n) \mathrm{d}\mu \leq \int g_n \mathrm{d}\mu$ □

Lema 8 *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ resp. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú postupnosti jednoducho integrovateľných funkcií, $f_n \nearrow f, g \nearrow g, f \leq g, f \leq g$. Potom*

$$\lim \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \lim \int g_n \mathrm{d}\mu$$

Dôkaz. Pre ľubovoľné n je podľa predpokladu $f_n \leq g = \lim\limits_{i\to\infty} g_i$. Preto podľa lemy 7 je

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int g_n \mathrm{d}\mu$$

pre každé n. Odtiaľ vyplýva tvrdenie lemy. □

Teraz už môžeme preveriť aj druhú časť definície integrálu. Nech $f_n \nearrow f, g_n \nearrow f$ a $\left\{\int f_n \mathrm{d}\mu\right\}$ a $\left\{\int g_n \mathrm{d}\mu\right\}$ sú ohraničené. Potom podľa lemy 8 je:

$$\lim \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \lim \int g_n \mathrm{d}\mu$$

. Pretože z lemy 8 vyplýva aj opačná nerovnosť, platí zrejme rovnosť.

Lema 9 *Ak $f, g \in P^+$, tak aj $f + g$ patrí do P^+ a platí $\int (f + g) \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \int g \mathrm{d}\mu$*

Dôkaz. Nech $f_n \nearrow f, g_n \nearrow g$ a $\left\{\int f_n \mathrm{d}\mu\right\}$ a $\left\{\int g_n \mathrm{d}\mu\right\}$ sú ohraničené a $f_n, g_n\,(n = 1, 2, \cdots)$ Nezáporné jednoducho integrovateľné. Potom $f_n + g_n \nearrow f + g, f_n + g_n$ je jednoducho integrovateľná $(n = 1, 2, \cdots)$ a $\left\{\int (f_n + g_n)\,\mathrm{d}\mu\right\}$ je ohraničená (vzhľadom na lemu 4). Preto $f + g \in P^+$ a platí:

$$\begin{aligned}\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \lim \int (f_n + g_n)\,\mathrm{d}\mu = \\ &= \lim \int f_n \mathrm{d}\mu + \lim \int g_n \mathrm{d}\mu = \\ &= \int f \mathrm{d}\mu + \int g \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

□

Konečne môžeme pristúpiť k previerke tretej časti definície integrálu. Nech $g_i, h_i \in P^+\,(i = 1, 2)$ a $f(x) = g_1(x) - h_1(x)$ resp. $f(x) = g_2(x) - h_2(x)$ pre všetky x pre ktoré je definované $g_1(x) - h_1(x)$ resp. $g_2(x) - h_2(x)$. Potom $g_1(x) + h_2(x) = g_2(x) + h_1(x) \in P^+$ pre všetky x (Ak totiž nie je definované $g_1(x) - h_1(x)$ alebo $g_2(x) - h_2(x)$, tak alebo $g_1(x) = h_1(x) = \infty$, alebo $g_2(x) = h_2(x) = \infty$. Okrem toho funkcie g_i a h_i sú nezáporné.)Podľa lemy 9 platí:

$$\int g_1 \mathrm{d}\mu + \int h_2 \mathrm{d}\mu = \int g_2 \mathrm{d}\mu + \int h_1 \mathrm{d}\mu$$

teda

$$\int g_1 \mathrm{d}\mu - \int h_1 \mathrm{d}\mu = \int g_2 \mathrm{d}\mu - \int h_2 \mathrm{d}\mu$$

Tým sme korektnosť definície integrálu dokázali.
B.Lineárnosť integrálu
Znakom L označme systém integrovateľných funkcií. *Funkcionálom* F defdinovaným na L nazývame ľubovoľnú konečnú reálnu funkciu definovanú na L. Funkcionál sa nazýva *lineárny*, ak $F(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 F(f_1) + c_2 F(f_2)$ pre všetky $f_1, f_2 \in L$ a všetky reálne čísla c_1, c_2. Prikladom funkcionálu na L je integrál: $F(f) = \int f \mathrm{d}\mu$. Ak chceme dokázať lineárnosť integrálu, môžeme postupovať tak, že najprv dokážeme rovnosť $F(f + g) = F(f) + F(g)$ a potom rovnosť $F(cf) = cF(f)$.

Veta 22 *Nech f, g sú integrovateľné funkcie. Nech h je taká funkcia definovaná na množine X, že platí $h(x) = f(x) + g(x)$, ak je súčet $f(x) + g(x)$ definovaný. Potom je funkcia h integrovateľná a platí: $\int h \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu + \int g \mathrm{d}\mu$*

Dôkaz. Nech $f = f_1 - f_2, g = g_1 - g_2$, pričom $f_1, f_2, g_1, g_2 \in P^+$ (Na tomto mieste aj naďalej postupujeme v zmysle nášho dohovoru, teda napr. výraz $f = f_1 - f_2$ znamená rozdiel funkcií $f_1(x) - f_2(x) = f(x)$, pre ktoré je $f_1(x) - f_2(x)$ definované). Potom $h = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$ je integrovateľná, lebo podľa lemy 9 $f_1 + g_1 \in P^+, f_2 + g_2 \in P^+$. Podľa tej istej lemy a definície integrálu platí:

$$\begin{aligned}\int h \mathrm{d}\mu &= \int (f_1 + g_1)\,\mathrm{d}\mu - \int (f_2 + g_2)\,\mathrm{d}\mu = \\ &= \int f_1 \mathrm{d}\mu + \int g_1 \mathrm{d}\mu - \int f_2 \mathrm{d}\mu - \int g_2 \mathrm{d}\mu = \\ &= \int f_1 \mathrm{d}\mu - \int f_2 \mathrm{d}\mu + \int g_1 \mathrm{d}\mu - \int g_2 \mathrm{d}\mu = \\ &= \int f \mathrm{d}\mu + \int g \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

□

Veta 23 *Nech f je integrovateľná funkcia, c reálne číslo. Potom cf je integrovateľná a platí:*

$$\int cf \mathrm{d}\mu = c \int f \mathrm{d}\mu$$

Dôkaz. Tvrdenie je zrejmé, ak $c = 0$. Tiež je zrejmé, že veta platí pre jednoducho integrovateľné funkcie.

- Nech $c > 0$. Nech $f \in P^+$, $f_n \nearrow f$, pričom f_n sú nezáporné jednoducho integrovateľné a $\left\{\int f_n \mathrm{d}\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Potom $cf_n \nearrow cf, cf_n$ sú jednoducho integrovateľné, $\left\{\int cf_n \mathrm{d}\mu\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{c \int f_n \mathrm{d}\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Preto $cf \in P^+$ a $\int cf \mathrm{d}\mu = \lim \int cf_n \mathrm{d}\mu = c \lim \int f_n \mathrm{d}\mu = c \int f \mathrm{d}\mu$.

- Nech teraz f je ľubovoľná integrovateľná funkcia $c \neq 0$. Nech $f = g - h$, kde $g, h \in P^+$. Potom v prípade, že $c > 0$, sa $cf = cg - ch, cg, ch \in P^+$, teda cf je integrovateľná a dostávame:

$$\begin{aligned} \int cf \mathrm{d}\mu &= \int cg \mathrm{d}\mu - \int ch \mathrm{d}\mu = \\ &= c \int g \mathrm{d}\mu - c \int h \mathrm{d}\mu = \\ &= c \int f \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

  Ak $c < 0$, tak $cf = (-c)\,h - (-c)\,g$, kde $-c > 0$, teda $ch \in P^+, -cg \in P^+$, v dôsledku čoho je cf integrovateľná a platí:

$$\begin{aligned} \int cf \mathrm{d}\mu &= \int -ch \mathrm{d}\mu - \int -cg \mathrm{d}\mu = \\ &= -c \int h \mathrm{d}\mu + c \int g \mathrm{d}\mu = \\ &= c \int f \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$ □

Na toto miesto sa ešte hodí nasledujúca veta:

Veta 24 *Ak f, g sú integrovateľné funkcie, $f \leq g$, tak $\int f \mathrm{d}\mu \leq \int g \mathrm{d}\mu$.*

Dôkaz. Z lemy 8 vyplýva, že veta platí pre funkcie $f, g \in P^+$. Nech f, g sú ľubovoľné integrovateľné funkcie, $f = f_1 - f_2, g = g_1 - g_2$, kde $f_1, f_2, g_1, g_2 \in P^+$. Pretože $f \leq g$, je $f_1 + g_2 \leq g_1 + f_2$. Odtiaľ podľa dokázaného a na základe lemy 9 vyplýva:

$$\int f_1 \mathrm{d}\mu + \int g_2 \mathrm{d}\mu \leq \int g_1 \mathrm{d}\mu + \int f_2 \mathrm{d}\mu$$

a teda

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int f_1 \mathrm{d}\mu - \int f_2 \mathrm{d}\mu \leq \int g_1 \mathrm{d}\mu - \int g_2 \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu$$ □

VETA O MONOTÓNNEJ KONVERGENCII

Ide o tzv. *Beppo-Leviho vetu*, ktorú možno formulovať napr. takto: Ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť integrovateľných funkcií a postupnosť ich integrálov je ohraničená, tak $\lim f_n$ je integrovateľná a $\int \lim f_n \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \mathrm{d}\mu$(Platí pravdaže aj duálne tvrdenie - o nerastúcich postupnostiach.)
V našom prípade bude účelnejšie dokázať najprv inú variantu Beppo-Leviho vety - pre nekonečné rady nezáporných funkcií. Ale aj túto vetu budú predchádzať dve pomocné tvrdenia.

Lema 10 *K ľubovoľnej nezápornej integrovateľnej funkcii f a kľubovoľnému kladnému číslu ε existujú také $g, h \in P^+$, že $f(x) = g(x) - h(x)$ kedykoľvek je rozdiel $g(x) - h(x)$ definovaný, pričom $\int h\mathrm{d}\mu < \varepsilon$*

Dôkaz. Podľa predpokladu $f = g' - h'$, kde $g', h' \in P^+$. K funkcii h' existuje taká postupnosť $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoduchých nezáporných funkcií, že $h_n \nearrow h'$ a $\int h'\mathrm{d}\mu = \lim \int h_n \mathrm{d}\mu$ pre dostatočne veľké n je teda $\int (h' - h_n)\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.
Položme $h = h' - h_n, g = g' - h_n$. Funkcie h, g sú z P^+. Napr. pre funkciu h toto tvrdenie vyplýva z toho, že $h = \lim\limits_{m\to\infty} (h_m - h_n)$. $\{h_m - h_n\}_{m=1}^{\infty}$ je neklesajúca, $h_m - h_n$ sú jednoducho integrovateľné, pre $m > n$ aj nezáporné a navyše

$$\int (h_m - h_n)\,\mathrm{d}\mu \leq \int h_m \mathrm{d}\mu + \int h_n \mathrm{d}\mu \leq 2\int h'\mathrm{d}\mu$$

Ďalej

$$\int h\mathrm{d}\mu = \int (h' - h_n)\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

$$f = g' - h' = (g' - h_n) - (h' - h_n) = g - h$$

□

Veta 25 *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká neklesajúca postupnosť funkcií z P^+, že $\lim \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$. Potom existuje taká neklesajúca postupnosť nezáporných, jednoduchých funkcií $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktorú $h_n \leq f_n$ a $\lim h_n = \lim f_n$. (Špeciálne teda $\lim f_n \in P^+$)*

Dôkaz. Podľa predpokladu existujú také neklesajúce postupnosti $\{g_n^m\}_{m=1}^{\infty}$ nezáporných jednoducho integrovateľných funkcií, že $g_n^m \nearrow f_n\,(m \to \infty)$.
Definujeme:

$$h_n = \max\left(g_1^n, g_2^n, \cdots, g_n^n\right)$$

Funkcie h_n sú jednoducho integrovateľné. Ďalej,
$g_1^n \leq f_1 \leq f_n, g_2^n \leq f_2 \leq f_n, \cdots, g_n^n \leq f_n$, teda $h_n \leq f_n\,(n = 1, 2, \cdots)$. Konečne $h_n = \max\left(g_1^n, g_2^n, \cdots, g_n^n\right) \leq \max\left(g_1^{n+1}, g_2^{n+1}, \cdots, g_n^{n+1}\right) \leq \max\left(g_1^{n+1}, g_2^{n+1}, \cdots, g_n^{n+1}, g_{n+1}^{n+1}\right) = h_{n+1}$
teda

$$h_n \leq h_{n+1}\,(n = 1, 2, \cdots)$$

Zostáva nám dokázať, že $\lim h_n = \lim f_n$
Nech m, n sú ľubovoľné prirodzené čísla. Položme $k = \max\,(m, n)$. Potom $n \leq k$, teda

$$g_n^k \leq \max\left(g_1^k, g_2^k, \cdots, g_k^k\right) = h_k$$

Pretože $m \leq k$ a $\left\{g_n^i\right\}_{i=1}^{\infty}$ je neklesajúca, platia nerovnosti

$$g_n^m \leq g_n^k \leq h_k \leq \sup_n h_n = \lim h_n$$

teda $g_n^m \le \lim h_n$ pre všetky m, n. Odtiaľ vyplýva

$$\lim_{m\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} g_n^m \le \lim_{n\to\infty} h_n$$

Opačná nerovnosť vyplýva z nerovnosti $h_n \le f_n \, (n = 1, 2, \cdots)$. □

Veta 26 *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezáporných integrovateľných funkcií, pričom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$. Potom je funkcia $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ integrovateľná a*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Dôkaz. Podľa poslednej lemy existujú ku každému n také $g_n, h_n \in P^+$, že $f_n = g_n - h_n$ a $\int h_n \mathrm{d}\mu < \frac{1}{2^n}$. Položme $k_n = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i$. Potom $k_n \nearrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$, pričom

$$\lim_{n\to\infty} \int k_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int h_i \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int h_n \mathrm{d}\mu < \infty$$

Preto podľa vety 25 je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n \in P^+$. Podobne dokážeme, že $\sum g_n \in P^+$ na základe nerovnosti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \int h_n \mathrm{d}\mu \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = 1 + \sum \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$$

Ak niektorý z rozdielov $g_n(x) - h_n(x)$ nie je definovaný, tak nie je definovaný ani rozdiel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x) - \sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n(x)$. Predpokladajme, že $g_n(x) - h_n(x)$ je definovaný pre každé n. Potom platí:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i(x)$$

pre každé n. Je teda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$ integrovateľná(uvedená rovnosť platí opäť v zmysle nášho dohovoru), pričom platí (na základe vety 25):

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} g_n \mathrm{d}\mu - \int \sum_{n=1}^{\infty} h_n \mathrm{d}\mu = \tag{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int g_i \mathrm{d}\mu - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int h_i \mathrm{d}\mu = \tag{3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int g_n \mathrm{d}\mu - \int h_n \mathrm{d}\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu \tag{4}$$

□

Veta 27 *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nekelsajúca postupnosť integrovateľných funkcií, $\lim \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$. Potom je funkcia $\lim f_n$ integrovateľná a platí:*

$$\int \lim f_n \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že všetky funkcie f_n sú konečné. Tak lepšie vynikne myšlienka dôkazu. Položme $g_1 = f_1, g_n = f_n - f_{n-1} \, (n = 2, 3, \cdots)$. Potom $g_n \ge 0 \, (n = 2, 3, \cdots), g_n$ sú integrovateľné a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=2}^{n} \left(\int f_i \mathrm{d}\mu - \int f_{i-1} \mathrm{d}\mu \right) + \int f_1 \mathrm{d}\mu \right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$$

Preto podľa vety 26 je funkcia $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ integrovateľná a platí:

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} g_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu$$

Ak sú f_n ľubovoľné integrovateľné funkcie, treba dôkaz trochu upraviť. Položme $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ $(n = 2, 3, \cdots)$, ak je rozdiel $f_n(x) - f_{n-1}(x)$ definovaný, $g_n(x) = \infty$, ak $f_n(x) = f_{n-1}(x) = \infty$ a $g_n(x) = 0$, ak $f_n(x) = f_{n-1}(x) = -\infty$. Funkcia g_n je integrovateľná pre každé n, pretože f_n, f_{n-1} sú integrovateľná a

$$g_n(x) = f_n(x) + (-f_{n-1}(x))$$

pre všetky x, pre ktoré je $f_n(x) + (-f_{n-1}(x)) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ definovaný (veta 22). Navyše

$$\int g_n \mathrm{d}\mu = \int f_n \mathrm{d}\mu - \int f_{n-1} \mathrm{d}\mu,$$

a okrem toho

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(x)$$

pre všetky x, pre ktoré má súčet na pravej strane zmysel. Vidíme, že uvedený dôkaz možno použiť aj vtedy, keď niektorá z funkcií f_n nadobudne nekonečné hodnoty. $\square$

ABSOLÚTNA KONVERGENCIA INTEGRÁLU

Vlastnosť, že funkcia f je integrovateľná vtedy a len vtedy keď je integrovateľná jej absolútna hodnota $|f|$, nazývame *absolútnou konvergenciou.* Musíme sa však rozhodnúť vzhľadom na ktorú $\sigma-$algebru budeme merateľné funkcie skúmať. Mohli by sme vziať napr. najmenší $\sigma-$okruh $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ nad okruhom $\mathscr{R}$(za predpokladu, že $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ je algebra). Pri tejto voľbe by sa však mohlo stať, že vzhľadom na našu definíciu nie všetky integrovateľné funkcie by boli merateľné. Preto budeme merateľnosť funkcií chápať vzhľadom na širší systém $\mathscr{S}$, ktorý budeme definovať. Všetky tvrdenia, ktoré sa budú vzťahovať na $\mathscr{S} \supset \mathscr{S}(\mathscr{R})$ budú platiť aj o $\mathscr{S}(\mathscr{R})$. Ak je totiž nejaká funkcia merateľná vzhľadom na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$, je merateľná aj vzhľadom na $\mathscr{S}$

Definícia 26 *Nech $\mathscr{R}$ je taký okruh podmnožín množiny X, že existuje postupnosť množín $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $\mathscr{R}$, pre ktorú $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = X$ a $\mu(E_n) < \infty$.[2] Nech μ je miera na $\mathscr{R}$. Znakom $\mathscr{N}$ budeme označovať systém všetkých množín E, ku ktorým existuje taká funkcia $f \in P^+$, že*

$$E \subset \{x : f(x) = \infty\}.$$

Napokon znakom $\mathscr{S}$ budeme označovať najmenší $\sigma-$okruh nad systémom $\mathscr{R} \cup \mathscr{N}$ (t.j.$\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{R} \cup \mathscr{N})$).

Lema 11 *Každá integrovateľná funkcia je $\mathscr{S}-$merateľná.*

Dôkaz. Predovšetkým je jasné, že každá jednoducho integrovateľná funkcia f je merateľná vzhľadom na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$, pretože $f^{-1}(E) \in \mathscr{R} \subset \mathscr{S}(\mathscr{R})$ pre všetky E borelovské a $f^{-1}(\{-\infty\}) = \emptyset \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$.
Ak $f \in P^+$, existuje taká postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoducho integrovateľných (teda tiež $\mathscr{S}(\mathscr{R})-$merateľných) funkcií, že $f = \lim f_n$ $(= \sup f_n)$. Preto podľa vety 19 je funkcia f $\mathscr{S}(\mathscr{R})-$merateľná. V prípade, že f je ľubovoľná merateľná funkcia, situácia je trochu zložitejšia. Nech $f = g - h$, kde $g, h \in P^+$. Položme $K = \{x : g(x) = \infty, h(x) = \infty\}$. Nech E je borelovská množina alebo množina $\{-\infty\}$. Máme dokázať, že $f^{-1}(E) \in \mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{R} \cup \mathscr{N})$. Predovšetkým uvážme, že platí:

$$f = f\chi_K + f\chi_{K'}$$

teda stačí dokázať, že sú merateľné funkcie $f\chi_K, f\chi_{K'}$. Ale

$$(f\chi_K)^{-1}(E) = \begin{cases} \left[K \cap f^{-1}(E)\right] \cup K', \text{ ak } 0 \in E \\ \left[K \cap f^{-1}(E)\right], \text{ ak } 0 \notin E \end{cases}$$

Množina v hranatej zátvorke patrí do $\mathscr{N} \subset \mathscr{S}(\mathscr{R} \cup \mathscr{N})$. Okrem toho $K' \in \mathscr{S}(\mathscr{R}) \subset \mathscr{S}(\mathscr{R} \cup \mathscr{N})$, pretože g, h sú $\mathscr{S}(\mathscr{R})-$merateľné. Skutočne teda $(f\chi_K)^{-1}(E) \subset \mathscr{S}(\mathscr{R} \cup \mathscr{N})$. V druhom prípade je

$$f\chi_{K'} = g\chi_{K'} - h\chi_{K'}$$

[2] Tým dosiahneme, že $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ je algebra. Uvedený predpoklad je splnený v mnohých rozumných príkladoch. Napr. v prípade Lebesguovej miery alebo v prípade, že $\mathscr{R}$ je algebra.

teda stačí dokázať $\mathscr{S}-$merateľnosť (dokonca $\mathscr{S}(\mathscr{R})-$merateľnosť) funkcií $g\chi_{K'}, h\chi_{K'}$. Ale $g\chi_{K'}, h\chi_{K'}$ sú súčiny $\mathscr{S}-$merateľných funkcií, pretože $g, h \in P^+$ a K' je $\mathscr{S}-$merateľná množina. □

Definícia $\sigma-$okruhu $\mathscr{S}$ je trochu komplikovaná. Jednoduchšiu charakteristiku systému $\mathscr{S}$ dáva nasledujúca lema.

Lema 12 *Nech $\mathscr{D}$ je systém všetkých množín $E \subset X$, pre ktoré je χ_E integrovateľná. Potom $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{D})$.*

Dôkaz. Vezmime ľubovoľnú množinu $E \in \mathscr{D}$ a také funkcie $f, g \in P^+$, že $\chi_E(x) = f(x) - g(x)$ pre všetky x, pre ktoré je rozdiel $f(x) - g(x)$ definovaný. Položme $K = \{x : f(x) = \infty, g(x) = \infty\}$. Potom

$$E = (E \cap K) \cup (E \cap K')$$

Ale množina $E \cap K \in \mathscr{N}$. Ďalej

$$\chi_{E\cap K'} = f\chi_{K'} - g\chi_{K'},$$

$K' \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$, funkcie f, g sú $\mathscr{S}(\mathscr{R})-$merateľné. Preto sú $\mathscr{S}(\mathscr{R})-$merateľné aj $f\chi_{K'}, g\chi_{K'}$, teda aj $\chi_{E\cap K'}$. Preto $E \cap K' = \chi^{-1}_{E\cap K'}(\{-1\}) \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$. V oboch prípadoch teda $E \cap K \in \mathscr{S}, E \cap K' \in \mathscr{S}$, teda aj $E \in \mathscr{S}$. Z práve dokázanej inklúzie $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ potom vyplýva inklúzia $\mathscr{S}(\mathscr{D}) \subset \mathscr{S}$.
Ak $E \in \mathscr{R}, \mu(E) < \infty$, tak χ_E je jednoducho integrovateľná, teda $E \in \mathscr{D}$. Nech $E \in \mathscr{N}, f \in P^+, E \subset \{x : f(x) = \infty\}$. Potom

$$\chi_E = f(x) - f(x)$$

pre všetky x, pre ktoré je rozdiel $f(x) - f(x)$ definovaný. Tento rozdiel je totiž definovaný práve vtedy keď $f(x) < \infty$. Ale vtedy je $\chi_E(x) = 0 = f(x) - f(x)$. Vidíme teda, že χ_E je integrovateľná funkcia, z čoho vyplýva, že $E \in \mathscr{D}$. Dostávame teda jednak, že $\mathscr{R} \subset \mathscr{S}(\mathscr{D})$ a jednak, že $\mathscr{N} \subset \mathscr{D}$. Odtiaľ vyplýva, že $\mathscr{R} \cup \mathscr{N} \subset \mathscr{D}$, teda $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}(\mathscr{D})$. □

Teraz sa už môžeme sústrediť na dôkaz tvrdenia, ktoré sme uviedli v úvode paragrafu.Prvú časť tohto tvrdenia dokážeme ľahko.

Lema 13 *Ak $g, h \in P^+$, tak $\max(g, h) \in P^+, \min(g, h) \in P^+$.*

Dôkaz. Nech $0 \le g_n \nearrow g, 0 \le h_n \nearrow h$, pričom g_n, h_n sú jednoducho integrovateľné, $\lim \int g_n \mathrm{d}\mu < \infty, \lim \int h_n \mathrm{d}\mu < \infty$. Potom

$$\min(g_n, h_n) \nearrow \min(g, h), \max(g_n, h_n) \nearrow \max(g, h)$$

pričom

$$\lim \int \min(g_n, h_n)\mathrm{d}\mu \le \lim \int g_n \mathrm{d}\mu < \infty$$

$$\lim \int \max(g_n, h_n)\mathrm{d}\mu \le \lim \int g_n \mathrm{d}\mu + \lim \int h_n \mathrm{d}\mu < \infty$$ □

Veta 28 *Ak je funkcia f integrovateľná, tak je integrovateľná aj funkcia $|f|$.*

Dôkaz. Ak je funkcia f integrovateľná, tak $f = g - h$, kde $g, h \in P^+$. Potom však

$$|f| = \max(g, h) - \min(g, h)$$

odkiaľ vzhľadom na lemu 14 vyplýva tvrdenie vety. □

Lema 14 *Ak f, g sú konečné a integrovateľné, tak sú integrovateľné aj funkcie* $\max(f, g), \min(f, g)$

Dôkaz. Stačí uvážiť, že:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(|f - g| + f + g)$$

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \qquad \square$$

Aby sme mohli dokázať tvrdenie opačné k vete 28, trochu odbočíme, pretože sme nepredpokladali, že $\mathscr{R}$ je $\sigma-$okruh. Dokázali sme, že každá merateľná (napr. vzhľadom na $\mathscr{S}$) funkcia je limitou neklesajúcej postupnosti jednoduchých funkcií (mali by sme písať vlastne $\mathscr{S}-$jednoduchých). Teraz dokážeme, že $\mathscr{S}-$jednoduché funkcie sú za istých okolností integrovateľné. V ďalšom texte $\mathscr{S}$ bude stále označovať najmenší $\sigma-$okruh nad $\mathscr{R} \cup \mathscr{N}$. Budeme tiež predpokladať, že $X \in \mathscr{S}$

Definícia 27 *Okruh $\mathscr{A}$ podmnožín množiny X sa nazýva $\delta-$okruh, ak zo vzťahov $E_i \in \mathscr{A}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ vyplýva $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{A}$.*

Veta 29 *Systém $\mathscr{D}$ všetkých množín $E \subset X$. Pre ktoré je χ_E integrovateľná, je $\delta-$okruh.*

Dôkaz. Najprv uvážme, že $\mathscr{D}$ je okruh. $\mathscr{D}$ je neprázdny, lebo $0 = \chi_\emptyset$ je integrovateľná, teda $\emptyset \in \mathscr{D}$. Ak $E, F \in \mathscr{D}$, tak χ_E, χ_F sú integrovateľná, teda sú integrovateľné aj

$$\chi_{E\cup F} = \max(\chi_E, \chi_F), \chi_{E-F} = \chi_E - \min(\chi_E, \chi_F)$$

Nech $E_n \in \mathscr{D}\,(n = 1, 2, \cdots)$, potom $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, kde $F_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i \in \mathscr{D}$. Pretože $\chi_{F_n} \searrow \chi_E, \int \chi_{F_n} \mathrm{d}\mu \geq 0$, je podľa Beppo-Leviho vety (pzri cvičenie 8) χ_E integrovateľná, teda $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{D}$. $\square$

Lema 15 *Nech $\mathscr{D} = \{E \in \mathscr{S} : \chi_E$ je integrovateľná$\}$. Ak $E \subset F, F \in \mathscr{D}, E \in \mathscr{S}$, tak $E \in \mathscr{D}$.*

Dôkaz. Položme $\mathscr{K} = \{G \in \mathscr{S} : F \cap G \in \mathscr{D}\}$. Zrejme $\mathscr{K} \supset \mathscr{D}$. Dokážeme, že $\mathscr{K}$ je $\sigma-$okruh. Nech $A, B \in \mathscr{K}$. Potom $F \cap A \in \mathscr{D}, F \cap B \in \mathscr{D}$, teda aj

$$F \cap (A - B) = F \cap A - F \cap B \in \mathscr{D}$$

Ďalej ak $A_n \in \mathscr{K}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, tak $F \cap A_n \in \mathscr{D}\,(n = 1, 2, \cdots)$, teda

$$F \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = F - \bigcap_{n=1}^{\infty} (F - (F \cap A_n)) \in \mathscr{D}$$

odkiaľ vyplýva, že $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{K}$.
Pretože $\mathscr{K}$ je $\sigma-$okruh a $\mathscr{K} \supset \mathscr{D}$, platí tiež $\mathscr{K} \supset \mathscr{S}(\mathscr{D}) = \mathscr{S}$.Množina E zo znenia lemy je z $\mathscr{S}$. Preto $E \in \mathscr{K}$, čiže $E = E \cap F \in \mathscr{D}$. $\square$

Lema 16 *Nech g je $\mathscr{S}-$jednoduchá funkcia (t.j. $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}, E_i \in \mathscr{S}$), f jednoducho integrovateľná funkcia, $0 \leq g \leq f$. Potom je funkcia g integrovateľná.*

Dôkaz. Nech $f = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{F_j} (F_j$ sú navzájom disjunktné množiny, $\beta_j \neq 0$, podobne $E_i, \alpha_i)$. Potom $E_i \cap F_j \in \mathscr{S}, E_i \cap F_j \subset F_j \in \mathscr{D}$. Podľa lemy 15 je $E_i \cap F_j \in \mathscr{D}$, teda $\chi_{E_i \cap F_j}$ je integrovateľná. Preto je integrovateľná aj funkcia $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \sum\limits_{j=1}^{m} \chi_{E_i \cap F_j}$. Tu sme, pravda použili tú skutočnosť, že $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} F_j$, čo vyplýva z nerovností $0 \leq g \leq f$ a z faktu $\alpha_i \neq 0$. $\square$

Veta 30 *Ak je $0 \leq g \leq f, g$ je merateľná, f integrovateľná, tak je aj g integrovateľná.*

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že funkcia g je $\mathscr{S}-$jednoduchá, $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$. Pretože $f = f' - f''$, $f', f'' \in P^+$, je $f \leq f' \in P^+$. Vezmime také jednoducho integrovateľné funkkcie f_n, že $f_n \nearrow f'$. Potom $g_n = \min(g, f_n)$ sú $\mathscr{S}-$jednoduché, teda podľa lemy 16 integrovateľné. Ďalej

$$g_n = \min(g, f_n) \nearrow \min(g, f') = g$$

$$\lim \int g_n \mathrm{d}\mu \leq \lim \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f' \mathrm{d}\mu$$

Podľa Beppo-Leviho vety je g integrovateľná.
Nech g je teraz ľubovoľná merateľná funkcia, $0 \leq g \leq f$. Potom existuje neklesajúca postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\mathscr{S}-$jednoduchých funkcií tak, že $0 \leq g_n \nearrow g \leq f$. Podľa predchádzajúceho sú g_n integrovateľné. Okrem toho $\lim \int g_n \mathrm{d}\mu \leq \int f \mathrm{d}\mu$. Preto je g integrovateľná podľa Beppo-Leviho vety. □

Veta 31 *Merrateľná funkcia f je integrovateľná vtedy a len vtedy, ak je integrovateľná jej absolútna hodnota $|f|$.*

Dôkaz. Nech $|f|$ je integrovateľná. Pretože $0 \leq f^+ \leq |f|$, $0 \leq f^- \leq |f|$, sú podľa vety 30 integrovateľné aj f^+, f^-, teda aj $f = f^+ - f^-$. Opačné tvrdenie je obsiahnuté vo vete 28 □

Veta 32 *Nech f, g sú integrovateľné funkcie, h je merateľná funkcia, $f \leq h \leq g$. Potom je funkcia h integrovateľná.*

Dôkaz. Platí $0 \leq h^+ \leq g^+ \leq |g|$, $0 \leq h^- \leq f^- \leq |f|$. Podľa vety 31 sú integrovateľné $|f|, |g|$, podľa vety 30 aj h^+, h^-, teda aj $h = h^+ - h^-$. □

DÔSLEDKY VETY O MONOTÓNNEJ KONVERGENCII

Uvedieme dva:Lebesguovu vetu a a vetu o $\sigma-$aditívnosti neurčitého integrálu ν definovaného vzťahom $\nu(E) = \int\limits_E f\mathrm{d}\mu = \int f\chi_E\mathrm{d}\mu$

Veta 33 *(Lebesgue). Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť integrovateľných funkcií, $\lim f_n = f$ a nech exsituje taká integrovateľná funkcia g, že $|f_n| \leq g\,(n = 1, 2, \cdots)$. Potom je funkcia f integrovateľná a platí:*

$$\int f\mathrm{d}\mu = \lim \int f_n\mathrm{d}\mu$$

Dôkaz. Položme $h_n = \int \{f_i : i \geq n\}, g_n = \sup\{f_i : i \geq n\}$. Potom

$$h_n \leq f_n \leq g_n, h_n \leq h_{n+1}, g_{n+1} \leq g_n\,(n = 1, 2, \cdots)$$

Ďalej

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \sup_n h_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{i\geq n} f_i = \liminf n \to \infty f_n = f$$

Podobne

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = f$$

Pretože $|g_n| \leq g, |h_n| \leq g\,(n = 1, 2, \cdots)$, sú podľa vety 30 funkcie g_n, resp. h_n integrovateľné. Ďalej $h_n \nearrow f, \lim \int h_n\mathrm{d}\mu \leq \int g\mathrm{d}\mu < \infty$, teda podľa vety 27 je funkcia f integrovateľná. Okrem toho platí:

$$\int f\mathrm{d}\mu = \lim \int h_n\mathrm{d}\mu$$

a podobne

$$\int f\mathrm{d}\mu = \lim \int g_n\mathrm{d}\mu$$

z toho a z nerovností

$$\int h_n\mathrm{d}\mu \leq \int f_n\mathrm{d}\mu \int g_n\mathrm{d}\mu$$

potom vyplýva:

$$\int f\mathrm{d}\mu = \lim \int f_n\mathrm{d}\mu$$

□

Definícia 28 *Nech f je integrovateľná funkcia. neurčitým integrálom z funkcie f rozumieme množinovú funkciu ν definovanú na $\mathscr{S}$ rovnosťou:*

$$\nu(E) = \int\limits_E f\mathrm{d}\mu = \int f\chi_E\mathrm{d}\mu^3$$

Veta 34 *Neurčitý integrál je $\sigma-$aditívna množinová funkcia.*

[3]Funkcia $f\chi_E$ je integrovateľná, pretože $|f\chi_E| \leq |f|$

Dôkaz. Nech najprv $f \geq 0$. Nech $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathscr{S}, E_i$ sú navzájom disjunktné. Podľa Beppo-Leviho vety je:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int f\chi_{E_i} \mathrm{d}\mu =$$

$$= \int \sum_{i=1}^{\infty} f\chi_{E_i} \mathrm{d}\mu = \int f\chi_E \mathrm{d}\mu = \nu(E)$$

Ak je teraz f ľubovoľná integrovateľná funkcia, tak
$f = f^+ - f^-, f\chi_{E_i} = f^+\chi_{E_1} - f^-\chi_{E_i}$, teda

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \int f\chi_{E_i} \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f^+\chi_{E_i} \mathrm{d}\mu - \sum_{i=1}^{\infty} \int f^-\chi_{E_i} \mathrm{d}\mu = \\ = \int f\chi_E \mathrm{d}\mu - \int f\chi_E \mathrm{d}\mu = \\ = \int f\chi_E \mathrm{d}\mu = \end{aligned}$$

□

VETA O ROZŠÍRENÍ MIERY

Definícia 29 *Miera μ definovaná na okruhu $\mathscr{R}$ sa nazýva $\sigma-$konečná, ak k ľubovoľnej množine $E \in \mathscr{R}$ existuje postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že*
$E_n \in \mathscr{R}, \mu(E_n) < \infty \, (n = 1, 2, \cdots)$ a $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Definícia 30 *Systém $\mathscr{M}$ podmnožín množiny X sa nazýva monotónny, ak platia dve nasledujúce implikácie:*

1. $E_n \in \mathscr{M}, E_n \subset E_{n+1} \, (n = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{M}$

2. $E_n \in \mathscr{M}, E_n \supset E_{n+1} \, (n = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{M}$

Veta 35 *Nech μ je $\sigma-$konečná miera na okruhu $\mathscr{R}$. Potom existuje práve jedna miera $\overline{\mu}$ na najmenšom $\sigma-$okruhu $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ nad $\mathscr{R}$, ktorá je rozšírením μ (t.j. $\overline{\mu}(E) = \mu(E)$ pre všetky $E \in \mathscr{R}$). Miera $\overline{\mu}$ je $\sigma-$konečná. Ak μ_1, μ_2 sú $\sigma-$konečné miery na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ zhodujúce sa na $\mathscr{R}$, tak $\mu_1 = \mu_2$.*

Dôkaz. 1.Existencia.
Nech $\mathscr{D}_0$ je systém vštkých množín $E \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$, pre ktoré je χ_E integrovateľná. Položme $\overline{\mu}(E) = \int \chi_E \mathrm{d}\mu$ pre $E \in \mathscr{D}_0, \overline{\mu}(E) = \infty$ pre $E \in \mathscr{S}(\mathscr{R}) - \mathscr{D}_0$. Ak je $E \in \mathscr{S}(\mathscr{R}) \subset \mathscr{S}, E \subset F, F \in \mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}$, tak podľa lemy 15 je $E \in \mathscr{D}$ (t.j. χ_E je integrovateľná). Súčasne $E \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$, teda $E \in \mathscr{D}_0$. Toto konštatovanie použijeme v ďalšom texte.
Nech $E \in \mathscr{R}$, potom buď $E \in \mathscr{D}_0$, teda $\overline{\mu}(E) = \int \chi_E \mathrm{d}\mu$, alebo $E \notin \mathscr{D}_0$, teda $\overline{\mu}(E) = \infty = \mu(E)$. Zrejme $\overline{\mu} \geq 0$ a podľa predchádzajúceho $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Dokážeme ešte $\sigma-$aditívnosť.
Nech $E_n \in \mathscr{S}(\mathscr{R}) \, (n = 1, 2, \cdots), E_n \cap E_m = \emptyset \, (n \neq m)$. Ak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n)$ konverguje (teda aj $E_n \in \mathscr{D}_0$), podľa Beppo-Leviho vety platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{E_n} \mathrm{d}\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} \mathrm{d}\mu = \\ = \int \chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n} \mathrm{d}\mu = \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

Ak je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n) = \infty$, tak aj $\overline{\mu}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \infty$. Keby totiž $\overline{\mu}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$, tak by $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{D}_0$, teda podľa lemy 15 by $E_n \in \mathscr{D}_0 \, (n = 1, 2, \cdots)$, z čoho

$$\int \chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n} \mathrm{d}\mu \geq \sum_{i=1}^{n} \int \chi_{E_i} \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

a to je spor.
2.Jednoznačnosť.*
Nech μ_1, μ_2 sú miery na $\mathscr{S}(\mathscr{R}), \mu_1(E) = \mu_2(E) = \mu(E)$ pre všetky $E \in \mathscr{R}$. Máme dokázať, že $\mu_1 = \mu_2$. Dôkaz rozdelíme na niekoľko častí. Dôležitú úlohu v ňom bude mať pojem monotónneho systému.

Podobne ako vo vete 14 možno dokázať, že nad ľubovoľným neprázdnym systémom $\mathscr{C}$ existuje najmenší monotónny systém $\mathscr{M}(\mathscr{C})$, t.j. taký monotónny systém, ktorý obsahuje $\mathscr{C}$ a ktorý je časťou každého iného monotónneho systému nad $\mathscr{C}$.

Lema 17 *Ak sú μ_1, μ_2 konečné, tak systém $\mathscr{M} = \{E : \mu_1(E) = \mu_2(E)\}$ je monotónny.*

Nech $E_n \subset E_{n+1}, E_n \in \mathscr{M}, F_n \supset F_{n+1}, F_n \in \mathscr{M}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Potom platí:

$$\mu\Big(\bigcup E_n\Big) = \lim \mu_1(E_n) = \lim \mu_2(E_n) = \mu_2\Big(\bigcup E_n\Big)$$

$$\mu\Big(\bigcap F_n\Big) = \lim \mu_1(F_n) = \lim \mu_2(F_n) = \mu_2\Big(\bigcap F_n\Big)$$

teda $\bigcup E_n \in \mathscr{M}, \bigcap F_n \in \mathscr{M}$

Lema 18 *Nech $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ je najmenší monotónny systém nad okruhom $\mathscr{R}$. Potom $\mathscr{M}(\mathscr{R}) = \mathscr{S}(\mathscr{R})$.*

Pretože $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ je monotónny systém, $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{R}$, je $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{M}(\mathscr{R})$. Ukážeme, že $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ je okruh. Nech $E \in \mathscr{R}$; položme

$$\mathscr{K} = \{F \in \mathscr{M}(\mathscr{R}) : E - F, E \cup F \in \mathscr{M}(\mathscr{R})\}$$

$\mathscr{K}$ je monotónny systém. Skutočne nech $F_n \in \mathscr{K}, F_n \subset F_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Potom $E - F_n, E \cup F_n \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Pretože $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ je monotónny systém a $E - F_n \supset E - F_{n+1}, E \cup F_n \subset E \cup F_{n+1}$,
platí:$E - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (E - F_n) \in \mathscr{M}(\mathscr{R}), E \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E \cup F_n) \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$
teda $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathscr{K}$. Podobne sa dokáže, že $\mathscr{K}$ je uzavretý vzhľadom na prieniky neratúcich postupností. Pretože $\mathscr{K}$ je monotónny systém a $\mathscr{K} \supset \mathscr{R}$, je $\mathscr{K} \supset \mathscr{M}(\mathscr{R})$, teda pre každé $E \in \mathscr{R}, F \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$ je $E - F \in \mathscr{M}(\mathscr{R}), E \cup F \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$. Vezmime teraz pevné $F \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$ a položme

$$\mathscr{L} = \{E \in \mathscr{M}(\mathscr{R}) : E - F, E \cup F \in \mathscr{M}(\mathscr{R})\}$$

Podľa predchádzajúceho je $\mathscr{L} \supset \mathscr{R}$. Pretože $\mathscr{L}$ je monotónny, je $\mathscr{L} \supset \mathscr{M}(\mathscr{R})$. Odtiaľ vyplýva, že $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ je okruh. $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ je aj $\sigma-$okruh, pretože $E_n \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ implikuje $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$. A pretože $\mathscr{M}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{R}$, je $\mathscr{M}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{S}(\mathscr{R})$

Lema 19 *Ak μ_1, μ_2 sú konečné miery na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ zhodujúce sa na $\mathscr{R}$, tak $E \in \mathscr{M}$ t.j. $\mu_1(E) = \mu_2(E)$*

Skutočne pre systém $\mathscr{M}$ z lemy 17 platí $\mathscr{M} \supset \mathscr{M}(\mathscr{R}) = \mathscr{S}(\mathscr{R})$; teda, ak $E \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$, tak $E \in \mathscr{M}$ t.j. $\mu_1(E) = \mu_2(E)$.

Lema 20 *Označme pre ľubovoľný systém množín $\mathscr{C}$ a ľubovoľnú množinu E znakom $\mathscr{C} \cap E$ systém všetkých množín tvaru $A \cap E$, kde $A \in \mathscr{C}$. Potom $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \cap E = \mathscr{S}(\mathscr{R} \cap E)$*

Najprv uvážme, že $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \cap E \supset \mathscr{R} \cap E, \mathscr{S}(\mathscr{R}) \cap E$ je $\sigma-$okruh, preto$\mathscr{S}(\mathscr{R}) \cap E \supset \mathscr{S}(\mathscr{R} \cap E)$. Aby sme dokázali opačný vzťah, zaveďme systém

$$\mathscr{K} = \{A : A \cap E \in \mathscr{S}(\mathscr{R} \cap E)\}$$

$\mathscr{K}$ je $\sigma-$okruh, čo vyplýva z rovností
$(A - B) \cap E = (A \cap E) - (B \cap E)\,, \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)$. Pretože zrejme $\mathscr{K} \supset \mathscr{R}$, je $\mathscr{K} \supset \mathscr{S}(\mathscr{R})$, teda pre ľubovoľnú množinu $A \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$ je $A \cap E \in \mathscr{S}(\mathscr{R} \cap E)$. To však znamená $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \cap E \subset \mathscr{S}(\mathscr{R} \cap E)$

Lema 21 *Ak ν je rozšírením μ na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$, tak ν je $\sigma-$konečná.*

Systém
$\mathscr{K} = \left\{ E \in \mathscr{S}(\mathscr{R}) : \text{ existujú také } E_n \in \mathscr{R}, \text{ že } \mu(E_n) < \infty, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}$ je $\sigma-$okruh, $\mathscr{K} \supset \mathscr{R}$. Preto $\mathscr{K} \supset \mathscr{S}(\mathscr{R})$.

Lema 22 *Ak μ_1, μ_2 sú $\sigma-$konečné miery na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ zhodujúce sa na $\mathscr{R}$, tak $\mu_1 = \mu_2$.*

Nech $E \in \mathscr{S}(\mathscr{R}), E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, G_n \in \mathscr{R}, \mu(G_n) < \infty \, (n = 1, 2, \cdots), G_i \cap G_j = \emptyset \, (i \neq j)$. Vezmime pevné n a na systéme $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \cap G_n = \mathscr{S}(\mathscr{R} \cap G_n)$ definujme funkcie $\overline{\mu}_i$ vzťahom $\overline{\mu}_i(A \cap G_n) = \mu_i(A \cap G_n) \, (i = 1, 2)$. $\overline{\mu}_i$ sú konečné miery zhodujúce sa na okruhu $\mathscr{R} \cap G_n$. Preto $\overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_2$, teda
$\mu_1(A \cap G_n) = \mu_2(A \cap G_n)$ pre každé n a každé $A \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$. Preto

$$\mu_1(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A \cap G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A \cap G_n) = \mu_2(E)$$

$\square$

NULOVÉ MNOŽINY

Tento paragraf by prípadne nemusel byť obsiahnutý v tom minimálnom programe, ktorý čitateľovi predkladáme. Dôvod, pre ktorý ho predsa len vsúvame, tkvie v tom, že aj v niektorých elementárnych prístupoch k teórii Lebesguovho integrálu sa pracuje s množinami nulovej miery priamo pri konštrukcii resp. definícii integrálu.(Možno si čitateľ všimol náznak takého postupu aj v našej konštrukcii.) Pokúsime sa preto vyjasniť úlohu nulových množín, a to z niekoľkých aspektov.

Predovšetkým ak je daný priestor miery $(X, \mathscr{S}, \mu)$, sú dané aj *nulové množiny*, t.j. také množiny $E \in \mathscr{S}$, pre ktoré $\mu(E) = 0$. Hovoríme, že nejaká vlastnosť platí skoro všade (skoro na celom priestore), ak množina tých x, pre ktoré tá vlastnosť neplatí je merateľná a (t.j. patrí do $\mathscr{S}$) a jej miera je 0.

Tak napr. postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje skoro všade k funkcii f, ak množina $E = \{x : f_n(x) \not\to f(x)\}$ patrí do $\mathscr{S}$ a $\mu(E) = 0$. Temer vo všetkých tvrdeniach, ktoré sme uviedli možno konvergenciu všade (t.j. v každom bode) nahradiť konvegenciou "skoro všade".

Na tomto mieste sa musíme rozhodnúť, vzhľadom na ktorú mieru budeme brať nulové množiny. V predchádzajúcej časti sme dokázali vetu o rozšírení miery z okruhu $\mathscr{R}$ na $\sigma-$okruh $\mathscr{S}(\mathscr{R})$. Mohli by sme brať nulové množiny z $\mathscr{S}(\mathscr{R})$. Pravda, lepšie výsledky dosiahneme, ak budeme brať množiny zo širšieho systému $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{D}) \supset \mathscr{S}(\mathscr{R})$. Nedostatok spočívajúci v tom, že na $\mathscr{S}$ ešte nemáme mieru hneď odstránime.

Lema 23 *Nech $\mathscr{D} = \{E : \chi_E$ je integrovateľná$\}$. Položme $\tilde{\mu}(E) = \int \chi_E \mathrm{d}\mu$ pre $E \in \mathscr{D}$ a $\tilde{\mu}(E) = \infty$ pre $E \in \mathscr{S}(\mathscr{D}) - \mathscr{D}$. Potom $\tilde{\mu}$ je miera na $\mathscr{S}$*

Dôkaz. Stačí zopakovať prvú časť dôkazu vety 35, kde systém $\mathscr{D}_0$ nahradíme systémom $\mathscr{D}$. V ďalšom texte budeme namiesto $\tilde{\mu}$ kvôli jednoduchosti písať μ □

Lema 24 *Ak $E \in \mathscr{S}, \mu(E) = 0$ a f je merateľná funkcia, tak* $\int\limits_E f \mathrm{d}\mu = \int f\chi_E \mathrm{d}\mu = 0$

Dôkaz. Nech $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, kde E_i sú disjunktné $E_i \in \mathscr{S}$. Potom $f\chi_E = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E\cap E_i}$. Množiny $E \cap E_i$ sú nielen z $\mathscr{S}$, ale aj z $\mathscr{D}$ $(\mu(E \cap E_i) \leq \mu(E) = 0)$. Preto je funkcia $f\chi_E$ integrovateľná a

$$\int f\chi_E \mathrm{d}\mu = \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E\cap E_i} \mathrm{d}\mu = 0$$

Ak je f nezáporná, existujú nezáporné jednoduché funkcie f_n, pre ktoré $f_n \nearrow f$. Potom

$$\int f\chi_E \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \chi_E \mathrm{d}\mu = 0$$

Konečne ak f je ľubovoľná merateľná funkcia, tak

$$f\chi_E = f^+\chi_E - f^-\chi_E$$

teda

$$\int f\chi_E \mathrm{d}\mu = \int f^+\chi_E \mathrm{d}\mu - \int f^-\chi_E \mathrm{d}\mu = 0$$ □

Veta 36 *Nech f je integrovateľná funkcia, g merateľná funkcia a $f = g$ skoro všade. Potom je integrovateľná aj funkcia g a platí:*

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu$$

Dôkaz. Nech $E = \{x : f(x) \neq g(x)\}$, potom $E \in \mathscr{S}$ a $\mu(E) = 0$. Zrejme $f\chi_{E'} = g\chi_{E'}$. Teda z vety 34 a lemy 24 vyplýva

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int_{E'} f \mathrm{d}\mu + \int_{E} f \mathrm{d}\mu = \int_{E} g \mathrm{d}\mu + \int_{E'} g \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu$$

pretože $g = g\chi_{E'} + g\chi_E$ je integrovateľná. □

Silnejší variant Beppo-Leviho vety:

Veta 37 *Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť integrovateľných funkcií skoro všade neklesajúca a skoro všade konvergujúca k merateľnej funkcii f. Nech $\lim \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$. Potom je funkcia f integrovateľná a $\int f \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \mathrm{d}\mu$*

Dôkaz. Existuje merateľná množina E taká, že $\mu(E) = 0$ a $f_n(x) \nearrow f(x)$ pre všetky $x \in E'$. Funkcie $f_n\chi_{E'}$ sú merateľné, $f_n\chi_{E'} = f_n$ skoro všade podľa 36 sú $f_n\chi_{E'}$ integrovateľné. Ďalej
$f_n\chi_{E'} \nearrow f\chi_{E'}, \lim \int f_n\chi_{E'} \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$. Podľa Beppo-Leviho vety (27) je $f\chi_{E'}$ integrovateľná a podľa lemy 24 platí:

$$\lim \int f_n \mathrm{d}\mu = \int f\chi_{E'} = \int_{E'} f \mathrm{d}\mu + \int_{E} f \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$$

Pretože $f = f\chi_{E'} + f\chi_E$ je integrovateľná. □

Možno si čitateľ spolu s nami dal otázku, či možno vo vete 36 odstrániť predpoklad merateľnosti funkcie g vzhľadom na to, že $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ je merateľná podľa predpokladu. Vyšetrime v čom by to mohlo zlyhať. Nech E je ľubovoľná borelovská množina, $F = \{x : f(x) \neq g(x)\}$. Potom

$$g^{-1}(E) = \left(g^{-1}(E) \cap F\right) \cup \left(g^{-1}(E) - F\right)$$

. Množina $g^{-1}(E) - F = f^{-1}(E) - F \in \mathscr{S}$, pretože $f \in \mathscr{S}$ a f je merateľná to však nemôžeme tvrdiť o množine $g^{-1}(E) \cap F$, o ktorej vieme len to, že je časťou množiny $F \in \mathscr{S}$ nulovej miery. Predpoklad merateľnosti funkcie g by bol teda zbytočný, keby sme vedeli, že $\mathscr{S}$ obsahuje všetky podmnožiny množín nulovej miery.

Definícia 31 *Nech $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je priestor miery. Mieru nazývame úplnou ak zo vzťahov $E \subset F, f \in \mathscr{S}, \mu(F) = 0$ vyplýva, že $E \in \mathscr{S}$*

Pravda "nulové"množiny množno do $\mathscr{S}$ popridávať a každú mieru μ možno zúplniť. Platí nasledujúca veta o zúplnení miery.

Veta 38 *Nech $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je priestor miery. Nech $\tilde{\mathscr{S}}$ je systém všetkých množín typu $E \cup F$, kde $E \in \mathscr{S}, F \subset N$ pre nejakú $N \in \mathscr{S}$ takú, že $\mu(N) = 0$. Pre množiny tohto typu položme $\tilde{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. Potom $\tilde{\mu}$ je úplná miera definovaná na $\sigma-$algebre $\tilde{\mathscr{S}}$, $\tilde{\mu}(E) = \mu(E)$ pre všetky $E \in \mathscr{S}$*

Dôkaz. Najprv treba dokázať korektnosť definície $\tilde{\mu}$. Nech $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2, E_1, E_2 \in \mathscr{S}, F_1 \subset N_1, F_2 \subset N_2, N_1, N_2 \in \mathscr{S}, \mu(N_1) = 0, \mu(N_2) = 0$. Potom $E_1 \subset E_2 \cup N_2$, teda

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2 \cup N_2) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$$

a podobne $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$.
Uzavretosť systému $\tilde{\mathscr{S}}$ vzhľadom na zjednotenia vyplýva zo vzťahov

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

pričom $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n, \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = 0$. Na to, aby sme dokázali, že $\tilde{\mathscr{S}}$ je $\sigma-$algebra stačí dokázať, že $\tilde{\mathscr{S}}$ je uzavretý vzhľadom na rozdiely. Nech $E \in \mathscr{S}, G \in \mathscr{S}, F \subset N \in \mathscr{S}, H \subset M \in \mathscr{S} \mu(N) = \mu(M) = 0$, potom

$$
\begin{gathered}
(E \cup F) - (G - H) = (E - (G \cup M)) \cup \\
\cup [(F - (G \cup H)) \cup ((E \cap M) - (G \cup H))]
\end{gathered}
$$

Množina $E - (G \cup M)$ je z $\mathscr{S}$, Zatiaľ čo množiny v hranatej zátvorke je časťou $N \cup M \in \mathscr{S}$, pričom $\mu(N \cup M) = 0$
Na to, aby sme dokázli, že $\tilde{\mu}$ je miera stačí preveriť $\sigma-$aditívnosť: Nech $E_n \cup F_n$ sú navzájom disjunktné množiny z $\tilde{\mathscr{S}}, E_n \in \mathscr{S}, F_n \subset N_n \in \mathscr{S}, \mu(N_n) = 0$. Potom sú E_n navzájom disjunktné množiny z $\mathscr{S}$ a platí:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}\Big(\bigcup (E_n \cup F_n)\Big) = \tilde{\mu}\Big(\bigcup E_n \cup \bigcup F_n\Big) = \mu\Big(\bigcup E_n\Big) = \\
= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(E_n \cup F_n)
\end{aligned}
$$

Zostáva nám dokázať úplnosť $\tilde{\mu}$. Nech $H \subset E \cup F \in \tilde{\mathscr{S}}, E \in \mathscr{S}, F \subset N \in \mathscr{S}, \mu(N) = 0, \mu(E \cup F) = 0$. Potom $\mu(E) = 0$ a $H = \emptyset \cup H, H \subset E \cup N \in \mathscr{S}, \mu(E \cup N) = 0$, teda $H \in \tilde{\mathscr{S}}$. □

Možnosť zúplnenia miery vedie k určitej dvojznačnosti. Napr. Lebesguovou mierou sa obvykle nerozumie príslušná miera na systéme všetkých borelovských množín(ktorej existenciu zaručuje veta 35), ale jej zúplnenie. Podobne to je aj s Lebesgue-Stieltjesovou mierou.
Určitú funkciu majú nulové množiny aj v nasledujúcich dvoch tvrdeniach, ktoré sme mohli dokázať už skôr, ale nechceli sme zdržiavať rytmus výkladu. Prvé z týchto tvrdení hovorí, že nezáporná funkcia, ktorej integrál sa rovná 0, sa sama skoro všade rovná 0.

Lema 25 *Nech f je integrovateľná funkcia. Potom f je skoro všade konečná(t.j. $\mu\big(\{x : f(x) \notin R^1\}\big) = 0$).*

Dôkaz. Podľa vety 28 je $|f|$ integrovateľná. Položme $E = \{x : f(x) = \infty\}$. Potom $|f| \geq n\chi_E \geq 0$ pre každé n, teda $n\chi_E$ je integrovateľná a platí. $\int |f| \,\mathrm{d}\mu \geq \int n\chi_E \mathrm{d}\mu = n\mu(E)$. Keby $\mu(E) > 0$, potom by $\lim n\mu(E) = \infty$. Preto $\mu(E) = 0$. Podobne postupujeme aj pri množine $\{x : f(x) = -\infty\}$ □

Lema 26 *Nech f je nezáporná, integrovateľná funkcia, $\int f \mathrm{d}\mu = 0$. Potom $f = 0$ skoro všade.*

Dôkaz. Zrejme $\{x : f(x) > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$. stačí dokázať, že všetky množiny $E_n = \left\{x : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ majú nulovú mieru. Keby však niektorá z množín E_n mala kladnú mieru, potom by

$$
\int f \mathrm{d}\mu \geq \int f\chi_{E_n} \mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) > 0
$$

čo nie je možné. □

Veľmi prirodzenou je otázka ako súvisí miera $\overline{\mu}$ na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ s mierou $\tilde{\mu}$ na $\mathscr{S}(\mathscr{D})$.

Veta 39 *K ľubovoľnej množine $G \in \mathscr{S}(\mathscr{D})$ existujú $E \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$ a $F \in \mathscr{S}(\mathscr{D})$ také, že $\tilde{\mu}(F) = 0, G = E \cup F$, teda $\tilde{\mu}(G) = \overline{\mu}(E)$. Miera $\tilde{\mu}$ je úplná.*

Dôkaz. Definujme systém

$$
\mathscr{K} = \{G \in \mathscr{S}(\mathscr{D}) : G = E \cup F, \text{ kde } E \in \mathscr{S}(\mathscr{R}), \tilde{\mu}(F) = 0\}
$$

Systém $\mathscr{K}$ je $\sigma-$okruh (pozri vetu 38). Okrem toho $\mathscr{K} \supset \mathscr{R}$ a $\mathscr{K} \supset \mathscr{N}$, kde $\mathscr{N}$ je systém všetkých množín F, ku ktroým existuje taká $f \in P^+$, že $F \subset \{x : f(x) = \infty\}$. Preto $\mathscr{K} \supset \mathscr{S}(\mathscr{R} \cup \mathscr{N}) = \mathscr{S}(\mathscr{D})$.
Skôr ako by sme dokázali úplnosť miery $\tilde{\mu}$, všimnime si najprv toto: Ak je f integrovateľná funkcia, tak $\{x : f(x) = \infty\} \in \mathscr{N}$. Skutočne, ak je f integrovateľná, tak existuje taká funkcia $g \in P^+$, že $g \geq f$. Potom však je $\{x : f(x) = \infty\} \subset \{x : g(x) = \infty\}$, teda $\{x : f(x) = \infty\} \in \mathscr{N}$.
Nech je teda $E \subset F, F \in \mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{R} \cup \mathscr{N}) = \mathscr{S}(\mathscr{D}), \tilde{\mu}(F) = 0$. Podľa definície $\tilde{\mu}$ je χ_F integrovateľná a $\int \chi_F \mathrm{d}\mu = 0$. Položme $f_n = n\chi_F$. Potom je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesajúca postupnosť integrovateľných funkcií, pričom $\int f_n \mathrm{d}\mu = n \int \chi_F \mathrm{d}\mu = 0$. Preto je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ integrovateľná funkcia. Lenže $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pre $x \notin F$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$ pre $x \in F$. Preto

$$E \subset \left\{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\right\}$$

teda $E \in \mathscr{N} \subset \mathscr{S}$. Samozrejme, $\tilde{\mu}(E) = 0$. □

Vidno, že rozšírením μ z $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ na $\mathscr{S}(\mathscr{D})$ nedostaneme nič "podstatne"nového. To čo je nové má mieru 0. Spomeňeme si však na dôvod, pre ktorý sme začali uvažovať systém $\mathscr{S}(\mathscr{D})$. Išlo o to, aby každá integrovateľná funkcia bola merateľná. Mohli sme postupovať aj iným spôsobom. Funkcie z P^+ totiž sú $\mathscr{S}(\mathscr{R})-$merateľné. Stačilo preto inak definovať pojem integrovateľnej funkcie. Alternatívna definícia znie takto: Funkcia f je integrovateľná, ak je $\mathscr{S}(\mathscr{R})-$merateľná a existujú také $g, h \in P^+$, že $f(x) = g(x) - h(x)$ pre všetky x, pre ktroé je rozdiel $g(x) - h(x)$ definovaný (teraz už môžeme povedať aj to, že $f = g - h$ skoro všade).
Pri takejto definícii pracujeme síce s užším systémom funkcií, ale uzavretým k podobným operáciám ako predtým. Namiesto systému L všetkých integrovateľných funkcií pracujemetotiž so systémom $L \cap M$, kde M je systém všetkých merateľných (vzhľadom na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$) funkcií. Platia napr. tieto dôležité tvrdenia.

Veta 40 1. *Ak $f, g \in L \cap M, f + g$ je definovaný na X, tak $f + g \in L \cap M$.*

2. *Ak $f_n \in L \cap M, f_n \leq f_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ a $\lim \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$, tak $\lim f_n \in L \cap M$*

3. *Nech $f \in M$. Potom $f \in L \cap M \Leftrightarrow \|f\| \in L \cap M$*

Dokážeme napr. druhé tvrdenie. Podľa Beppo-Leviho vety je $\lim f_n \in L$. Okrem toho $\lim f_n \in M$ ako limita postupnosti $\mathscr{S}(\mathscr{R})-$mearateľných funkcií. Preto $\lim f_n \in L \cap M$.
Skutočne teda na systéme funkcií $L \cap M$ dostávame "dobrú"teóriu integrovania.
Mohli by sme ísť ešte ďalej a pracovať len s konečnými funkciami, teda so systémom $L \cap M \cap K$, kde K je systém všetkých konečných funkcií. Pravda, tu už musíme voliť opatrnejšie formulácie. Napr. Beppo-Leviho veta potom znie: Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť funkcií z $L \cap M$, pričom $\lim f_n$ je konečná funkcia a $\lim \int f_n \mathrm{d}\mu$. Potom $\lim f_n \in L \cap M$ (a samozrejme patrí aj do K).
Dvojakosť v zavedení miery vedie aj k určitej nepodstatnej dvojakosti v zavedení integrálu. Integrál môžeme budovať pomocou miery, ale aj pomocou jej zúplnenia. Funkcie, ktoré by sme nezahrnuli pri prvom prípade, ako aj pri iných uvedených alternatívach, môžeme zahrnúť dodatočne. To je posledná otázka, ktorú chceme nadhodiť.
Nech F je systém všetkých integrovateľných funkcií (vzhľadom na určitú mieru μ). Pre $f \in F$ položme $I(f) = \int f \mathrm{d}\mu$. Položme ďalej$\overline{F} = \{f :$ existuje $g \in F, \{x : f(x) \neq g(x)\} \subset E, \mu(E) = 0\}$, $\overline{I}(f) = I(g)$.
Definícia je korektná, lebo ak h je iná taká funkcia, že $\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset G, \mu(G) = 0$, potom $\{x : f(x) \neq g(x)\} \subset E \cup G, \mu(E \cup G) = 0$, teda $I(h) = I(g)$.
Dokážeme napr. Beppo-Leviho vetu.

Veta 41 *Nech $f_n \in \overline{F}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $f_n \nearrow f$ skoro všade,* $\lim \overline{I}(f_n) < \infty$. *Potom $f \in \overline{F}$ a $\overline{I}(f) = \lim \overline{I}(f_n)$*

Dôkaz. Existujú $g_n \in F, M_n \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$ také, že
$\{x : f_n(x) \neq g_n(x)\} \subset M_n, \mu(M_n) = 0$. Ďalej nech
$N = \{x :$ neplatí $f_n(x) \nearrow f(x)\}$. Položme $M = N \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Potom
$M \in \mathscr{S}(\mathscr{R})$ a $g_n \chi_{M'} \nearrow f \chi_{M'}$ všade. Funkcia
$g = f \chi_{M'} \in F, \{x : f(x) \neq g(x)\} \subset M$ a
$\overline{I}(f) = I(g) = \lim I(g_n \chi_{M'}) = \lim \overline{I}(f_n)$ $\square$

POZNÁMKY K DEFINÍCII INTEGRÁLU

Najprv niekoľko slov k terminologického charakteru. *Lebesguov* integrál je v pôvodnom zmysle slova integrál definovaný pomocou Lebesguovej miery na priamke resp. v $n-$rozmernom priestore. Podstatná tu však nie je tá okolnosť, že ide o dĺžku úsečky, podstatný je typ teórie, charakterizovaný napr. Beppo-Leviho vetou. Preto sa Lebesguovým často nazýva aj abstraktný integrál takéhoto typu. Mali by sme vravieť vlastne o lebesguovskej teórii alebo teórii či integráli Lebesguovho typu. Táto určitá dvojznačnosť iste nebude robiť čitateľovi ťažkosti. Naproti tomu pojem *Lebesguova miera* sa používa výhradne v euklidovskom priestore pre určitým spôsobom definovanú mieru.
V podstate jestvujú dve metódy budovanie teórie Lebesguovho integrálu: pomocou miery (definovanej povedzme na okruhu) alebo pomocou rozšírenia lineárneho spojitého funkcionálu (definovaného povedzme na systéme všetkých jednoducho integrovateľných funkcií). Uvidíme, že medzi týmito metódami nie je taký rozdiel, ako by sa zdalo na prvý pohľad. Pretože sme neobchádzali pojem miery, patrí náš výklad do prvej skupiny.
Zopakujme si náš postup. Predpokladali sme, že je daný priestor X, okruh $\mathscr{R}$ podmnožín množiny X a miera μ na $\mathscr{R}$. To bolo dané. Prirodzeným spôsobom sme definovali jednoducho integrovateľné funkcie a integrál z nich. Potom sme zaviedli systém P^+ limít niektorých neklesajúcich postupností jednoducho integrovateľných funkcií. Napokon sme zaviedli integrovateľné funkcie ako "skoro rozdiely"funkcií z P^+
Obvykle sa v teórii integrálu budovanom pomocou miery predpokladá, že μ je miera definovaná na nejakom $\sigma-$okruhu. Nech $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{R})$ je najmenší $\sigma-$okruh nad okruhom $\mathscr{R}$ a majme mieru na $\mathscr{S}$. Táto miera indukuje mieru na $\mathscr{R} \subset \mathscr{S}$. Teóriu integrálu môžeme teda budovať dvojako, vyjdúc alebo z miery na $\mathscr{R}$, alebo z miery na $\mathscr{S}$. Otázka je či dostaneme to isté, teda či dostaneme ten istý systém integrovateľných funkcií a ten istý integrál.
Skôr ako by sme dokázali kladnú odpoveď na túto otázku, dohovorme sa o niektorých označeniach. Budeme hovoriť o $\mathscr{R}-$jednoducho resp. $\mathscr{S}-$jednoducho integrovateľných funkciách, o systémoch $P^+(\mathscr{R})$, resp. $P^+(\mathscr{S})$ a systémoch všetkých $\mathscr{R}-$integrovateľných resp.$\mathscr{S}-$integrovateľných funkcií. Tieto pojmy iste nemusíme zvlášť objasňovať.

Veta 42 *Nech $\mathscr{R}$ je okruh, $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{R})$ najmenší $\sigma-$okruh nad $\mathscr{R}, \mu = \mu_{\mathscr{S}}$ miera na $\mathscr{S} \sigma-$konečná na $\mathscr{R}, \mu_{\mathscr{R}}$ ňou indukovaná miera na $\mathscr{R}, L(\mathscr{R})$ resp. $L(\mathscr{S})$ systém všetkých integrovateľných funkcií vzhľadom na $\mu_{\mathscr{R}}$ resp. $\mu_{\mathscr{S}}$. Potom $L(\mathscr{R}) = L(\mathscr{S})$ a pre každú $f \in L(\mathscr{R})$ je:*

$$\int f \mathrm{d}\mu_{\mathscr{R}} = \int f \mathrm{d}\mu_{\mathscr{S}}$$

Dôkaz. Zrejme $L(\mathscr{S}) \supset L(\mathscr{R})$. Dokážeme opak. Nech $E \in \mathscr{S}, \mu(E) < \infty$. Znakom $\mathscr{D}_0$ označme systém všetkých $F \in \mathscr{S}$ takých, že $\chi_F \in L(\mathscr{R})$. Podľa lemy 15 je $E \in \mathscr{D}_0$, teda $\chi_E \in L(\mathscr{R})$. Potom sú ale z $L(\mathscr{R})$ aj všetky $\mathscr{S}-$jednoducho integrovateľné funkcie, v3etkz funkcie z $P^+(\mathscr{S})$ a v dôsledku toho aj všetky funkcie z $L(\mathscr{S})$. Teda $L(\mathscr{S}) \subset L(\mathscr{R})$
Pokiaľ ide o rovnosť integrálov, je zrejmé, že ju stačí dokázať pre funkcie typu $\chi_E, E \in \mathscr{S}, \mu(E) < \infty$. V tom prípade podľa vety 35 najprv platí:

$$\int \chi_E \mathrm{d}\mu_{\mathscr{S}} = \overline{\mu}(E)$$

Podľa tej istej vety platí $\overline{\mu} = \mu_{\mathscr{S}}$. Preto

$$\int \chi_E \mathrm{d}\overline{\mu} = \int \chi_E \mathrm{d}\mu_{\mathscr{S}}$$

□

Nevýhoda metódy spočívajúcej v budovaní teórie vychádzajúcej zo $\sigma-$okruhu je v tom, že obvykle nemáme zadanú mieru na $\sigma-$okruhu (napr. $\mu(\langle a, b\rangle) = b - a$), ale na nejakom okruhu $\mathscr{R}$, z ktorého treba mieru ešte rozšíriť na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$. My síce máme k dispozícii vetu o rozšírení miery, ale existenciu takého rozšírenia sme získali pomocou teórie integrálu, čo nemôžeme urobiť vtedy, keď predpokladáme pred vybudovaním teórie integrálu existenciu miery na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$.
Teória budovaná pomocou miery na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ má však aj svoje výhody tieto výhody spočívajú najmä v tom, že niektoré dôkazy sú potom jednoduchšie. Ukázali sme, že už systém $L \cap M$ všetkých integrovateľných a $\mathscr{S}(\mathscr{R})-$merateľných funkcií má rozumné vlastnosti. Teraz si všimneme ako možno množiny $L \cap M$ ešte inak charakterizovať.
Ak je $f \geq 0, f \in L \cap M$, tak podľa vety 20 existuje taká neklesajúca postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\mathscr{S}(\mathscr{R})$jednoduchých funkcií, že $f = \lim f_n$. Pretože $0 \leq f_n \leq f$ a f je integrovateľná, sú f_n integrovateľné, teda $\mathscr{S}(\mathscr{R})-$jednoducho integrovateľné. Odtiaľ vyplýva, že $f \in P^+(\mathscr{S}(\mathscr{R}))$, teda nezáporná funkcia patrí do $L \cap M$ vtedy a len vtedy keď $f \in P^+(\mathscr{S}(\mathscr{R}))$
Ďalej $f \in L \cap M$ vtedy a len vtedy keď $f^+, f^- \in L \cap M$, ale to je vtedy a len vtedy, keď $f^+, f^- \in P^+(\mathscr{S}(\mathscr{R}))$. Teda f je z $L \cap M$ vtedy a len vtedy keď existujú také funkcie $g, h \in P^+(\mathscr{S}(\mathscr{R}))$, že $f = g - h$ (ide tu už o rovnosť "všade", nie "skoro všade". Môžeme totiž položiť $g = f^+, h = f^-$, čo nie je možné v prípade triedy $P^+(\mathscr{R})$, ktorá f^+, resp. f^- nemusí obsahovať.)
Integrál možno teda definovať (vyjdúc z miery na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$) takto:

1. f je jednoducho integrovateľná, ak existujú také disjunktné množiny $E_i \in (\mathscr{R})\,(i = 1, \cdots, n)$ konečnej miery, že $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$;

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

2. $f \in P^+$, ak existuje taká neklesajúca postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných integrovateľných funkcií, že $f = \lim f_n, \lim \int f_n \mathrm{d}\mu < \infty$ a platí:

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \mathrm{d}\mu$$

3. Funkcia f je integrovateľná vtedy a len vtedy, keď existujú také $g, h \in P^+$, že $f = g - h$. Potom

$$\int f \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\mu - \int h \mathrm{d}\mu$$

Pravda, nejde len o definíciu. Pomocou uvedenej definície integrálu (na systéme $L \cap M$) možno niektoré vety jednoduchšie dokazovať. Napr. vetu 31 Ak $|f|$ je integrovateľná a f merateľná, tak $|f| = g - h, g, h \in P^+$ a $f^+ \leq |f| \leq g$. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú neklesajúce postupnosti nezáporných, jednoduchých funkcií, g_n sú navyše integrovateľné, pričom $f_n \nearrow f^+, g_n \nearrow g$. Potom $h_n = \min(f_n, g_n) \nearrow \min(f^+, g) = f^+$, kde h_n sú jednoducho integrovateľné $(0 \leq h_n \leq g_n)$, teda $f^+ \in P^+$. Podobne dokážeme, že $f^- \in P^+$. Preto je funkcia $f = f^+ - f^-$ integrovateľná.
Definícia integrálu, ktorej sme sa pridržiavali je elementárnejšia, vhodná napr. aj pre prvú informáciu o integráli. Toho, kto chce aplikovať integrálny počet, nezaujímajú natoľko technické ťažkosti spojené s dôkazmi niektorých viet, ktorých znenie je inak veľmi jednoduché (Beppo-Leviho veta, veta o absolútnej konvergencii integrálu).
V ďalšom texte budeme mať mieru na $\sigma-$algebre $\mathscr{S}$ obyčajne vopred danú. (Napr. pravdepodobnosť P). V tom prípade je $\mathscr{S}(\mathscr{S}) = \mathscr{S}$ a práve popísaná definícia integrálu je veľmi vhodná. Preto sa dohodneme, že v prípade

pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathscr{S}, P)$ Budeme integrovať len náhodné premenné (konečné merateľné funkcie) merateľné vzhľadom na $\mathscr{S}$
Úloha o rozšírení miery je pravdaže sama o sebe zaujímavá. Možno ju riešiť aj bez použitia integrálov. Uveďme si aspoň jednu konštrukciu . Pôjde o metódu rozšírenia miery pomocou vonkajšej miery a pochádza od C. Carathéodoryho.
Nech μ je miera na okruhu $\mathscr{R}$. Prodpokladajme ešte (nie je to nevyhnutné), že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_n \in \mathscr{R}, \mu(E_n) < \infty \, (n = 1, 2, \cdots)$. Potom pre ľubovoľnú množinu $E \subset X$ položme:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset E, A_i \in \mathscr{R} \right\}$$

Ďalej nech $\tilde{\mathscr{S}}$ je systém všetkých $E \subset X$, pre ktoré platí:

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E')$$

pre všetky $A \subset X$. Množiny patriace do $\tilde{\mathscr{S}}$ nazývame μ^*-merateľnými. Potom $\tilde{\mathscr{S}}$ je $\sigma-$okruh, $\tilde{\mathscr{S}} \supset \mathscr{R}$(teda aj $\tilde{\mathscr{S}} \supset \mathscr{S}(\mathscr{R})$), funkcia $\tilde{\mu}$ definovaná na $\tilde{\mathscr{S}}$ rovnosťou $\tilde{\mu}(E) = \mu^*(E)$, ktorá je rozšírením miery μ. $\tilde{\mathscr{S}}$ sa líši od $\mathscr{S}(R)$ nepodstatne. Miera $\tilde{\mu}$ na $\tilde{\mathscr{S}}$ je zúplnením zodpovedajúcej miery na $\mathscr{S}(\mathscr{R})$.
Záverom tejto časti uvedieme ešte inú definíciu integrálu tiež pomocou miery na $\sigma-$okruhu. Aj táto definícia sa dosť používa, azda pre svoju názornosť.
Daný je teda priestor $X, \sigma-$algebra $\mathscr{S}$ Podmnožín X, μ miera na $\mathscr{S}$. Integrál z jednoducho integrovateľných funkcií sa definuje proirodzeným spôsobom. Nech f je merateľná, nezáporná funkcia. Vypočítajme:

$$F(f) = \sup \left\{ \int g \mathrm{d}\mu : g \text{ jednoducho integrovateľná }, g \leq f \right\}$$

Ak je $F(f) < \infty$, nazveme f integrovateľnou a $\int f \mathrm{d}\mu = F(f)$. Konečne ľubovoľnú merateľnú funkciu nazývame integrovateľnou, ak sú integrovateľné funkcie $f^+, f^-; \int f \mathrm{d}\mu = \int f^+ \mathrm{d}\mu - \int f^- \mathrm{d}\mu$.
A teraz niekoľko poznámok k teórii integrovania, ktorá nepredpokladá teóriu miery. Nebudeme mať daný priestor miery. Namiesto neho budeme mať definovaný systém funkcií F_0 a na ňom definovaný funkcionál I_0.
Predpokladáme, že sú splnené tieto podmienky:

1. Ak $f, g \in F_0, c$ je reálne číslo, tak
   $f + g \in F_0, cf \in F_0, \max(f, g) \in F_0, \min(f, g) \in F_0$.
2. $I_0(f + g) = I_0(f) + I_0(g), I_0(cf) = cI_0(f)$.
3. Ak $f_n \nearrow 0$, tak $I_0 \nearrow 0$

Potom existuje systém $F \supset F_0$ a funkcionál I definovaný na F, ktorý je rozšírením I_0, taký, že okrem vlastností analogickým k vlastnostiam 1 a 2 platí: ak $f_n \nearrow f$ alebo $f_n \searrow f, f_n \in F \, (n = 1, 2 \cdots)$, tak $f \in F$ a $\lim I(f_n) = I(f)$ a $\{I(f_n)\}$ je ohraničená.
Uvedená myšlienka vytvoriť abstraktnú teóriu integrovania patrí Danielovi. Preto sa v týchto súvislostiach hovorí o *Danielovom integráli.*
Jedna z metód ako získať požadované rozšírenie je podobná tej, pomocou ktorej sme zostrojovali integrál. Najprv Uvažujme systém F^+ všetkých limít f neklesajúcich postupností $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcií z F_0 takých, že $\{I_0(f_n)\}$ je ohraničená;$I^+(f) = \lim I_0(f_n)$. Ďalej uvažujme množinu F tých funkcií f, ku ktorým existujú funkcie $g, h \in F^+$ také, že $f(x) = g(x) - h(x)$, kedykoľvek je tento rozdiel definovaný;$I(f) = I^+(g) - I^+(h)$.
Pravdaže, existujú aj iné spôsoby konštrukcie F a I. Napríklad, okrem systému F^+ môžeme vytvoriť analogický spôsobom systém F^-(limity nerastúcich postupností) a uvažovať systém F všetkých funkcií f, pre ktoré

$$\inf \left\{ I^+(g) : g \in F^+, g \geq f \right\} = \sup \left\{ I^-(h) : h \in F^-, h \leq f \right\}$$

pričom

$$I(f) = \inf \left\{ I^+(g) : g \in F^+, g \geq f \right\}$$

Ak $(X, \mathscr{R}, \mu)$ je priestor miery, F_0 systém všetkých jednoducho integrovateľných funkcií, $I_0(f) = \int f \mathrm{d}\mu$, tak sú splnené všetky predpoklady Danielovej schémy.

LEBESGUOVA MIERA A LEBESGUOV INTEGRÁL

V tomto paragrafe zhrnieme doterajšie poznatky o Lebesguovej miere a integráli a trochu ich doplníme. S Lebesguovou mierou sme sa už stretli. Najprv sme definovali mieru intervalov typu $\langle a, b)$ $(a \leq b)$ rovnosťou

$$\mu(\langle a, b)) = b - a$$

potom na okruhu $\mathscr{R}$ všetkých množín E tvaru $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i)(\langle a_i, b_i)$ navzájom disjunktné) rovnosťou

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Pomocou Lebesguovej miery μ definovaný integrál sa nazýva *Lebesguov*. Budeme ho označovať znakmi

$$\int f \mathrm{d}\mu, \int\limits_{(-\infty,\infty)} f(x)\mathrm{d}x, \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Boli definované aj integrály typu

$$\int\limits_{\langle a,b)} f(x)\mathrm{d}x = \int f \chi_{\langle a,b)} \mathrm{d}\mu$$

podobne

$$\int\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)\mathrm{d}x$$

atď súčasne sme videli, že miera μ môže byť jediným spôsobom rozšírená na $\sigma-$algebru $\mathscr{B} = \mathscr{S}(\mathscr{R})$ všetkých borelovských množín. *Lebesguovou mierou* možno potom rozumieť buď toto rozšírenie $\overline{\mu}$, buď jeho zúplnenie $\tilde{\mu}$. Dohodnimme sa, v tomto paragrafe budeme znakom $\mathscr{R}$ označovať najmenší okruh nad systémom všetkých intervalov $\langle a, b)$, znakom $\mathscr{B}$ systém všetkých borelovských množín a znakom μ Lebesguovu mieru na $\mathscr{B}$. (Medzitým sme inak zistili, že nezáleží na tom či pri teórii integrálu vyjdeme z okruhu $\mathscr{R}$ alebo zo $\sigma-$algebry $\mathscr{B} = \mathscr{S}(\mathscr{R})$.)
Počítajme mieru jednobodovej množiny $\{x\}$, čo je zrejme borelovská množina. Máme:
$\mu(\{x\}) = \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, x + \frac{1}{n})\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu\big(\langle x, x + \frac{1}{n})\big) = \lim\limits_{n\to\infty} \big(x + \frac{1}{n} - x\big) = 0$
Preto
$\int\limits_{\langle a,b\rangle} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\langle a,b)} f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{\{b\}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\langle a,b)} f(x)\mathrm{d}x + f(b)\mu(\{b\}) = \int\limits_{\langle a,b)} f(x)\mathrm{d}x$
Podobne

$$\int\limits_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{(a,b\rangle} f(x)\mathrm{d}x$$

Túto spoločnú hodnotu budeme označovať aj znakom

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

. Hneď v 1. časti sme dokázali vzorec, pomocou ktorého sa integrály bežne počítajú. Keď je funkcia f spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$ a F je k nej primitívna, je funkcia f integrovateľná a platí:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Okrem toho máme pre výpočty k dispozícii prostriedky, ktoré sme získali.
Z metodického hľadiska možno postupovať aj inak. Pri definícii môžeme napr. celkom vynechať pojem miery. Uvedieme taký postup. Intervalom budeme pritom rozumieť ľubovoľný z intervalov $\langle a, b)\,, (a, b\rangle\,, (a, b)\,, \langle a, b\rangle$, pričom $a \le b$, teda aj jednobodovú množinu $\{a\} = \langle a, a\rangle$ budeme považovať za interval. Interval $\langle a, a\rangle$ sa nazýva tiež *degenerovaný*. Intervaly, ktoré nie sú degenerované, nazývajú sa *nedegenerované*.

Alternatívna definícia integrálu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Funkciu f definovanú na intervale $\langle a, b\rangle$ nazveme jednoduchou, ak sa $\langle, a, b\rangle$ dá rozdeliť na konečný počet disjunktných intervalov, na ktorých je funkcia f konštantná (je jedno akého druhu sú intervaly). Nech E_i sú tie intervaly, $\mu(E_i)$ ich dĺžky, α_i tie konštanty $(i = 1, 2, \cdots, n)$ a nech sú E_i navzájom disjunktné. Potom definujeme

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

Ďalej možno podobne ako predtým definovať pomocou jednoduchých funkcií funkcie z P^+ a integrovateľné funkcie. Uvážme, že touto metódou dostaneme ten istý integrál čo predtým. Predovšetkým je zrejmé, že funkcie integrovateľné v zmysle def. 23-25 sú integrovateľné aj podľa práve uvedenej modifikovanej definície. Naopak, nech $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, kde E_i sú navzájom disjunktné intervaly. funkcie χ_{E_i} sú integrovateľné v zmysle definície 23-25. Preto je integrovateľná aj funkcia f. Ďalej stačí použiť vety 27, 22 a 23.
Pri ďalšom rozvíjaní teórie integrálu (a to hneď pri preverovaní korektnosti definície integrálu) mala dôležitú úlohu lema 6 (inak 3. vlastnosť Danielovej schémy). Predtým sme ju dokázali pomocou $\sigma-$aditívnosti Lebesguovej miery na $\mathscr{R}$. Táto lema sa však dá dokázať aj priamo. Urobíme taký dôkaz. Zaujímavé je to, že pri ňom použijeme Borelovu vetu o pokrytí; túto vetu sme použili aj pri dôkaze $\sigma-$aditívnosti Lebesguovej miery.

Veta 43 *Nech* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť jednoduchých funkcií,* $f_n \searrow 0$*. Potom* $\lim \int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = 0$

Dôkaz. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo. Body nespojitosti funkcie f_n uzavrime do otvorených intervalov $A_1^n, \cdots, A_{i_n}^n$, ktorých súčet dĺžok je menší než $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Ak x nie je bod nespojitosti žiadnej z funkcií f_n, vezmime okolie $B(x)$ bodu x a prirodzené číslo $n = n(x)$ tak, aby $f_n(t) < \varepsilon$ pre všetky $t \in B(x)$. Intervaly A_i^n a $B(x)$ v súhrne pokrývajú $\langle a, b\rangle$. Podľa Borelovej vety možno z tohto pokrytia vybrať konečné podpokrytie, t.j. existujú body $x_1, \cdots x_p$ a číslo k také, že

$$\langle a, b\rangle \subset \bigcup_{n=1}^{k} \bigcup_{i=1}^{i_n} A_i^n \cup \bigcup_{j=1}^{p} B(x_j)$$

Zrejme

$$\sum_{n=1}^{k} \sum_{i=1}^{i_n} \mu(A_i^n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon$$

Položme $N = \max n(x_i)$. Nech $n > N$. Množinu $\bigcup\limits_{i=1}^{p} B(x_i)$ možno vyjadriť ako zjednotenie konečného počtu navzájom disjunktných intervalov $B_1, \cdots, B_t$, ktoré sú časťou $\langle a, b\rangle$ a na každom z nich je funkcia f_n konštantná. Preto platí:

$$b - a \ge \mu(B_1) + \cdots + \mu(B_t).$$

Na každom z intervalov $B(x_i)$ je $f_n < \varepsilon$. Preto aj na každom z intervalov B_i platí pre $n > N$ nerovnosť $f_n < \varepsilon$. Označme $d_i = f_n(x)$ pre $x \in B_i, M = \max f_1$. Potom

$\int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \le \sum\limits_{i=1}^t d_i\mu(B_i) + \sum\limits_{i,n} \mu(A_i^n)M < \varepsilon \sum\limits_{i=1}^t \mu(B_i) + \varepsilon M \le \varepsilon\,(b-a) + \varepsilon M$ □

Teraz si všimneme niektoré špeciálne vlastnosti Lebesguovej miery. Videli sme už, že jednobodová množina má Lebesguovu mieru 0. Platí silnejšie tvrdenie: každá spočítateľnéá množina (t.j. množina, ktorej prvky sa dajú zoradiť do postupnosti) má Lebesguovu mieru 0.

Definícia 32 *Množina A je nekonečná spočítateľná, ak existuje prosté zobrazenie množiny všetkých prirodzených čísel na množinu A. Množinu nazveme spočítateľnou (spočetnou), ak je alebo nekonečná spočítateľná, alebo konečná. Ani tu nie je jednotnosť v terminológii. Podľa inej terminológie sa nazýva nanajvýš spočítateľnou taká množina, akú sme nazvali spočítateľnou.*

Lema 27 *Každá spočítateľná množina A je borelovská a $\mu(A) = 0$*

Dôkaz. $A = \bigcup\limits_{i\in S} \{x_i\}$, kde S je množina prirodzených čísiel. Pretože jednobodové množiny sú borelovské, je borelovská aj množina A a platí:

$$\mu(A) = \sum_{i\in S} \mu(\{x_i\}) = 0.$$

□

Na to, aby sme charakterizovali všetky množiny, ktorých Lebesguova miera je 0, budeme potrebovať túto lemu:

Lema 28 *Nech $\{A_t\}_{t\in T}$ je ľubovoľný systém nedegenerovaných intervalov. Nech $A = \bigcup\limits_{t\in T} A_t$ t.j. $A = \{x: \text{ existuje } t \in T, x \in A_t\}$. Potom existuje taká spočítateľná množina navzájom disjunktných intervalov $\{E_i\}_{i\in S}$, že $A = \bigcup E_i$. Ak sú všetky intervaly A_t otvorené, tak sú otvorené aj všetky E_i.*

Dôkaz. Nech x, y sú dve reálne čísla. Budeme písať $x \equiv y$, ak existujú také $t_1, \cdots, t_k \in T$, že $x \in A_{t_1}, y \in A_{t_k}, A_{t_i} \cap A_{t_{i+1}} \neq \emptyset\,(i = 1, \cdots, k-1)$. Relácia $\equiv$ je zrejme symetrická (t.j. $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$) a tranzitívna (t.j. $x \equiv y, y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$). Pre $t \in T$ Položme

$$B_t = \{x: \text{ existuje } y \in A_t, x \equiv y\}$$

Z tranzitívnosti vyplýva, že $u \equiv v$ pre každé dva prvky $u, v \in B_t$. Ďalej ak $B_t \cap B_s \neq \emptyset$, tak $B_t = B_s$. Skutočne, nech napr. $x \in B_t$ a nech $y \in B_t \cap B_s$. Potom $x \equiv y$ a $y \equiv z$ pre nejaké $z \in B_s$, teda existuje $z \in B_s$, pre ktoré je $x \equiv z$, čo znamená, že $x \in B_s$. Dokázali sme teda, že $B_t \subset B_s$. Opačná inklúzia sa dokáže podobne.
Uvažujme teraz množinu (systém) $\mathscr{K}$ všetkých množín B_t pre $t \in T$, teda $\mathscr{K} = \{B_t : t \in T\}$. Práve sme zistili, že ak $E, F \in \mathscr{K}, E \cap F \neq \emptyset$, tak $E = F$ alebo, čo je to isté, platí $E \neq F \Rightarrow E \cap F = \emptyset$. Vyberme z každej množiny $E \in \mathscr{K}$ racionálne číslo $r(E)$ (To je možné, pretože každá z množín $E \in \mathscr{K}$ obsahuje otvorený interval a každý taký interval obsahuje aspoň jedno racionálne číslo). Ak $E \neq F$, tak $E \cap F = \emptyset$, teda $r(E) \neq r(F)$. Pretože racionálnych čísel je spočítateľne veľa, je množina $\mathscr{K}$ spočítateľná. Môžeme teda prečíslovať prvky systému $\mathscr{K}, \mathscr{K} = \{E_1, E_2, E_3, \cdots\} = \{E_i\}_{i\in S}$.
Pretože $E_i = B_t$ pre niektoré $t \in T$ a množina B_t je zjednotením niektorých A_s je $E_i \subset A$ pre každé $i \in S$, teda $\bigcup E_i \subset A$. Na druhej strane $\bigcup E_i = \bigcup B_t \supset \bigcup A_t = A$.
Teraz dokážeme, že všetky množiny B_t sú intervaly. Nech $x, y \in B_t, x < z < y$. Z konštrukcie B_t vyplýva, že $x \equiv y$ t.j.
$x \in A_{s_1}, y \in A_{s_k}, A_{s_i} \cap A_{s_{i+1}} \neq \emptyset\,(i = 1, \cdots, k-1)$. Preto je množina $\bigcup\limits_{i=1}^k A_{s_i}$ interval, $x, y \in \bigcup\limits_{i=1}^k A_{s_i}$, teda aj $z \in \bigcup\limits_{i=1}^k A_{s_i}$. Odtiaľ dostávame, že $z \equiv x$, teda $z \in B_t$. Konečne nech všetky A_t sú otvorené intervaly. Nech B_t nie je otvorený, napr. $B_t = \langle c, d)$. Podľa definície B_t existuje také $s \in T$, že $c \in A_s, A_s \subset B_t$. Ale A_s je otvorený interval, $A_s = (\alpha, \beta), \alpha < c < \beta$. Preto $B_t \supset (\alpha, \beta)$, čo je v spore s predpokladom $B_t = \langle c, d)$ □

Veta 44 *Nech $\tilde{\mu}$ je zúplnenie Lebesguovej miery. Potom $\tilde{\mu}(A) = 0$ vtedy a len vtedy, ak k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje taká postupnosť intervalov $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$, že $A \subset \bigcup E_i$ a $\sum \mu(E_i) < \varepsilon$.*

Dôkaz. Nech je splnená podmienka uvedená vo vete. Potom $\tilde{\mu}(A) \leq \sum \mu(E_i) < \varepsilon$ pre každé $\varepsilon > 0$. Preto $\tilde{\mu}(A) = 0$
Naopak, nech $\tilde{\mu}(A) = 0$ a nech uvedená podmienka neplatí. Potom exsituje také $\varepsilon > 0$, že pre všetky spočítateľné systémy $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ intervalov, pre ktoré $A \subset \bigcup E_i$, je $\sum \mu(E_i) \geq \varepsilon$. Podľa vety 39 vieme, že existuje taká funkcia $f \in P^+$, pre ktorú $A \subset \{x : f(x) = \infty\}$. Nech f_i sú jednoducho integrovateľné funkcie také, že $f_i \nearrow f$. Nech n je ľubovoľné prirodzené číslo, $x \in A$. Pretože $f(x) > n$, existuje také i, že $f_i(x) > n$. Pretože f_i je jednoduchá funkcia, existuje dokonca taký interval $E(x)$, že

$$f(t) \geq f_i(t) > n \text{ pre všetky } t \in E(x)$$

Teraz použijeme lemu 28, pričom za systém $\{A_t\}_{t\in T}$ berieme $\{E(x)\}_{x\in A}$. Existuje teda taký spočítateľný systém $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ navzájom disjunktných intervalov, že $\bigcup E_i \supset A$. Preto $\sum \mu(E_i) \geq \varepsilon$, teda

$$\int f\mathrm{d}\mu \geq \int_{\bigcup E_i} f\mathrm{d}\mu = \sum \int_{E_i} f\mathrm{d}\mu \geq n \sum \mu(E_i) \geq n\varepsilon$$

Pretože posledná nerovnosť platí pre každé n, funkcia f nie je integrovateľná, čo je v spore s predpokladom $f \in P^+$. □

Výklad o Lebesguovej miere zakončíme uvedením niekoľkých faktov súvisiacich s topológiou na priamke, t.j. s tzv. otvorenými a uzavretými množinami. Pripomeňme, že okolím prvku a rozumieme ľubovoľný interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Definícia 33 *Množina $A \subset R_1$ sa nazýva otvorená, ak k ľubovoľnému $a \in A$ existuje také okolie tohto prvku, ktoré je časťou množiny A. Množina A sa nazýva uzavretá, ak je komplementom otvorenej množiny.*

Veta 45 *Všetky otvorené a uzavreté množiny sú borelovské. Zjednotenie postupnosti otvorených množín a prienik konečného počtu otvorených množín je otvorená množina. Prienik postupnosti uzavretých množín je uzavretá množina a zjednodtenie konečného počtu uzavretých množín je uzavretá množina.*

Dôkaz. Nech A je otvorená množina. K ľubovoľnému prvku $x \in A$ existuje také jeho okolie $E(x)$, že $E(x) \subset A$. Podľa lemy 28 existujú také otvorené intervaly E_i, že $A = \bigcup E_i$. Pretože $E_i \in \mathscr{B}$, aj $A \in \mathscr{B}$. Ak je C uzavretá množina, tak $R_1 - C$ je otvorená, teda $R_1 - C \in \mathscr{B}$. Pretože $\mathscr{B}$ je algebra, je tiež $C = R_1 - (R_1 - C) \in \mathscr{B}$. Nech U_n sú otvorené množiny $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Potom existuje také n, že $x \in U_n$. Pretože U_n je otvorená existuje také okolie U bodu x, že $U \subset U_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Teda $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ je otvorená. ďalej nech $y \in \bigcap_{n=1}^{k} U_n$. Pretože U_n sú otvorené množiny, existujú také okolia $E_1, \cdots, E_k$ bodu y, že $E_i \subset U_i\ (i = 1, \cdots, k)$. Pretože $\bigcap_{n=1}^{k} E_i$ je okolie bodu y a $\bigcap_{i=1}^{k} E_i \subset \bigcap_{i=1}^{k} U_i$, je aj množina $\bigcap_{i=1}^{k} U_i$ otvorená
Uzavretosť systému uzavretých množín vzhľadom na vyznačené operácie vyplýva z tzv. De Morganových pravidiel.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (R_1 - U_n) = R_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

$$\bigcup_{n=1}^{k} (R_1 - U_n) = R_1 - \bigcap_{n=1}^{k} U_n$$

□

Hlavný výsledok tejto časti je obsiahnutý v nasledujúcej vete (o tzv. regulárnosti Lebesguovej miery), ktorá hovorí, že každá borelovsku množina sa dá zvnútra aproximovať uzavretými množinami a zvonku otvorenými.

Veta 46 *Nech $E \in \mathscr{B}$. Potom*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U, U \text{ otvorená }\} = \\ = \sup\{\mu(C) : C \subset E, C \text{ uzavretá, ohraničená }\}$$

(Množina C je ohraničená, ak ak je obsihnutá v nejakom ohraničenom intervale. Uzavreté,ohraničené množiny sa nazývajú tiež kompaktnými.)

Dôkaz. Nech (a, b) je ľubovoľný otvorený ohraničený interval. Definujme na $\mathscr{B}$ funkciu ν rovnosťou

$$\nu(E) = \mu(E \cap (a, b))$$

Ľahko sa zistí, že ν je miera.
Označme znakom $\mathscr{M}$ systém všetkých množín E, pre ktoré platí

$$\nu(E) = \inf\{\nu(U) : E \subset U, U \text{ otvorená }\} = \\ = \sup\{\nu(C) : C \subset E, C \text{ uzavretá, ohraničená }\}$$

Ľahko nahliadneme, že $\mathscr{M} \supset \mathscr{R}$. Ak dokážeme, že $\mathscr{M}$ je monotónny systém (definícia 30), dostaneme, že $\mathscr{M} \supset \mathscr{M}(\mathscr{R}) = \mathscr{S}(\mathscr{R}) = \mathscr{B}$ (lema 18).
Nech teda $E_n, F_n \in \mathscr{M}, E_n \subset E_{n+1}, F_n \supset F_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Položme $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n, F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Pretože ν je konečná miera, platí:

$$\nu(E) = \lim \nu(E_n), \nu(F) = \lim \nu(F_n)$$

Pretože $E_n, F_n \in \mathscr{M}$, existujú také kompaktné množiny C_n, D_n a také otvorené množiny U_n, V_n, že platí:

$$C_n \subset E_n \subset U_n, \nu(U_n) - \nu(E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}, \nu(E_n) - \nu(C_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \\ D_n \subset F_n \subset V_n, \nu(V_n) - \nu(F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}, \nu(F_n) - \nu(D_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Položme $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. U je otvorená množina, $U \supset E$ a

$$\nu(U) - \nu(E) = \nu(U - E) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n - E_n)\right) \leq \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(U_n - E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Ďalej pre dostatočne veľké n je:

$$\nu(E) - \nu(E_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

teda

$$\nu(E) - \nu(C_n) = \nu(E) - \nu(E_n) + \nu(E_n) - \nu(C_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$$

Vidíme teda, že $E \in \mathscr{M}$. Podobne sa dokáže, že $F \in \mathscr{M}$. Položme $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$. D je uzavretá a ohraničená množina. Okrem toho

$$\nu(F) - \nu(D) = \nu(F - D) = \nu\left(F - \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F - D_n)\right) \leq \\ \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n - D_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n - D_n) \leq \varepsilon$$

Podobne

$$\nu(U_n) = \nu(U_n) - \nu(F_n) + \nu(F_n) - \nu(F) < \varepsilon$$

pre dosť veľké n
Ak je $E \subset (a, b)$, $E \in \mathscr{B}$, tak $\nu(E) = \mu(E)$. Pretože $E \in \mathscr{M}$, platí $\mu(E) = \nu(E) = \inf\{\nu(U) : E \subset U, U \text{ otvorená }\}$. Ale pre každú otvorenú

nadmnožinu U množiny E platí $\nu(U) \geq \nu(U \cap (a,b)) = \mu(U \cap (a,b)) \geq \mu(E)$, kde $U \cap (a,b)$ je otvorená nadmnožina množiny E. Preto

$$\mu(E) = \inf\{\nu(U) : E \subset U, U \text{ otvorená}\} \geq$$

$$\geq \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ otvorená}\} \geq \mu(E)$$

teda

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ otvorená}\}$$

Rovnosť

$$\begin{aligned}\mu(E) = \sup\{\nu(C) : C \subset E, C \text{ kompaktná}\} =\\ = \sup\{\mu(C) : C \subset E, C \text{ kompaktná}\}\end{aligned}$$

je zrejmá.
Zatiaľ sme tvrdenie vety dokázali pre ohraničené borelovské množiny. Ak je E ľubovoľná borelovská množina, tak

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

kde $E_n = E \cap (-n, n)$, teda

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

Ak $\mu(E) = \infty$, tak k ľubovoľnému $K > 0$ existuje prirodzené n, pre ktoré

$$\mu(E_n) > K$$

Vzhľadom na to, že $\mu(E_n) = \sup\{\mu(C) : C \subset E_n, C \text{ kompaktná}\}$, existuje taká kompaktná množina $C \subset E_n \subset E$, že

$$\mu(C) > K$$

Na druhej strane pre $U \supset E, U$ otvorenú, platí $\mu(U) = \mu(E) = \infty$ teda

$$\begin{aligned}\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E, U \text{ otvorená}\} =\\ = \sup\{\mu(C) : C \subset E, C \text{ kompaktná}\}\end{aligned}$$

Ak je $\mu(E) < \infty$, tak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existujú také otovrené množiny U_n a kompaktné C_n, že

$$C_n \subset E_n \subset U_n, \mu(U_n) - \mu(E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}, \mu(E_n) - \mu(C - n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Vtedy platí:

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) - E\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n - E_n) \leq \varepsilon$$

$$\mu(E - C_n) = \mu(E - E_n) + \mu(E_n - C_n) < \varepsilon$$

pre dosť veľké n □

ÚPLNOSŤ PRIESTORU VŠETKÝCH INTEGROVATEĽNÝCH FUNKCIÍ

V pozadí vlastností Lebesguovho integrálu, ktoré sme študovali je tzv. úplnosť priestoru všetkých integrovateľných funkcií. Tento priestor sa obvykle označuje L_1.

Definícia 34 *Nech X je neprázdna množina prvkov. Nech ku každým dvom prvkom $x, y \in X$ je priradené reálne číslo $\varrho(x, y)$ vyhovujúce týmto podmienkam:*

1. $\varrho(x, y) \geq 0$, *pre všetky* $x, y \in X; \varrho(x, x) = 0$ *pre všetky* $x \in X$.
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ *pre všetky* $x, y \in X$
3. $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ *pre všetky* $x, y, z \in X$

Potom sa dvojica (X, ϱ) nazýva pseudometrický priestor, funkcia ϱ sa nazýva pseudometrika.

Veta 47 *Nech $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je ľubovoľný priestor miery, L_1 je systém všetkých integrovateľných funkcií (vzhľadom na μ). Pre $f, g \in L_1$ položme*

$$\varrho(f, g) = \int |f - g| \,\mathrm{d}\mu$$

Potom (L_1, ϱ) je pseudometrický priestor.

Dôkaz. Zrejme
$\int |f - g| \,\mathrm{d}\mu \geq 0, \int |f - f| \,\mathrm{d}\mu = \int 0 \mathrm{d}\mu = 0, \int |f - g| \,\mathrm{d}\mu = \int || g - f \mathrm{d}\mu$. Nech $f, g, h \in L_1$. Potom $|f - g| = |f - h + h - g| \leq |f - h| + |h - g|$ a preto tiež

$$\int || f - g \mathrm{d}\mu \leq \int || f - h \mathrm{d}\mu + \int || h - g \mathrm{d}\mu \qquad \square$$

Definícia 35 *Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov pseudometrického priestoru (X, ϱ) sa nazýva cauchyovská, ak k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje také N, že pre všetky $m, n > N$ je $\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná ak existuje také $x \in X$, že $\lim \varrho(x_n, x) = 0$. Pseudometrický priestor sa nazýva úplný, ak každá cauchyovská postupnosť je konvergentná.*

Na ilustráciu uveďme niekoľko príkladov. Na množine R_1 zaveďme obvyklú vzdialenosť $\varrho(x, y) = |x - y|$. Je známe, že (R_1, ϱ) je úplný pseudometrický priestor. Iný príklad úplného priestoru: $(\langle a, b\rangle, \varrho)$, kde ϱ je pseudometrika zavedená podobne ako v prvom príklade, lenže na množine $\langle a, b\rangle$. Aj v ďalších dvoch príkladoch má ϱ podobný význam. Priestor $(\mathbb{Q}, \varrho)$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všetkých racionálnych čísel nie je úplný. Podobne nie je úplný priestor $((a, b), \varrho)$. Vyššie definovaný priestor (L_1, ϱ) je úplný, čo hneď dokážeme. Keby sme namiesto L_1 uvažovali užší systém funkcií-napr. všetky Riemannovsky integrovateľné alebo všetky spojité a pod., nedostali by sme úplný priestor. Na túto skutočnosť čitateľa zvlášť upozorňujeme.

Veta 48 *Priestor* (L_1, ϱ)*(kde* $\varrho(f,g) = \int |f-g| \,\mathrm{d}\mu$*) je úplný pseudometrický priestor.*

Dôkaz. * Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná cauchyovská postupnosť. K číslu $\frac{1}{2}$ existuje také n_1, že pre všetky $m, n > n_1$ je $\varrho(f_n, f_m) < \frac{1}{2}$. K číslu $\frac{1}{4}$ existuje také $n_2 > n_1$, že pre všetky $m, n \geq n_2$ je $\varrho(f_m, f_n) < \frac{1}{4}$. Pretože $n_1, n_2 \geq n_1$, podľa predchádzajúceho platí:

$$\varrho(f_{n_1}, f_{n_2}) < \frac{1}{2}$$

Podobne zostrojíme $n_3 > n_2$, od ktorého počnúc $\varrho(f_m, f_n) < \frac{1}{2^3}$. Pretože $n_2, n_3 \geq n_2$, platí:

$$\varrho(f_{n_2}, f_{n_3}) < \frac{1}{2^2}$$

Teraz už iste vidno, akým spôsobom možno zostrojiť rastúcu postupnosť $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ tak, aby

$$\varrho\big(f_{n_i}, f_{n_{i+1}}\big) < \frac{1}{2^i}\;(i = 1, 2, \cdots)$$

Položme kvôli kratšiemu zápisu $g_i = f_{n_i}$ $(i = 1, 2, \cdots)$, teda
$g_i \in L_1, \varrho(g_i, g_{i+1}) < \frac{1}{2^i}$ $(i = 1, 2, \cdots)$
(Na tomto mieste prezradíme myšlienku dôkazu. Limitou postupnosti $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ a potom aj $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ bude funkcia $f = \liminf\limits_{n\to\infty} g_n = \sup\limits_{n\geq 1} \inf\limits_{i\geq n} g_i$)
Položme $h_n = \inf\limits_{i\geq n} g_i$ $(n = 1, 2, \cdots)$ a pre pevné n položme
$k_j = \min(g_n, g_{n+1}, \cdots, g_{n+j})$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$. Potom $k_0 = g_n, k_j \in L_1$ a $k_j \nearrow h_n$ $(j \to \infty)$. Aby sme mohli použiť Beppo-Leviho vetu, musíme dokázať, že $\left\{\int k_j \mathrm{d}\mu\right\}_{j=1}^{\infty}$ je ohraničená. Za tým účelom najprv uvážme, že platí nerovnosť $k_j - k_{j-1} \leq |g_{n+j} - g_{n+j+1}|$ Táto nerovnosť je zrejmá, ak $k_j(x) = k_{j+1}(x)$. Ak $k_j(x) > k_{j+1}(x) = \min(k_j, g_{n+j+1})$, je $g_{n+j+1}(x) = k_{j+1}(x)$ ale $k_j(x) \leq g_{n+j}(x)$.
Preto $\int (k_j - k_{j+1}) \,\mathrm{d}\mu \leq \varrho(g_{n+j}, g_{n+j+1}) < \frac{1}{2^{n+j}}$, teda

$$\int (g_n - k_j) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=0}^{j-1} \int (k_i - k_{i+1}) \,\mathrm{d}\mu < \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{n+i}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\int k_j \mathrm{d}\mu > \int g_n \mathrm{d}\mu - \frac{1}{2^{n-1}}\;(j = 0, 1, 2, \cdots)$$

Pretože $\left\{\int k_j \mathrm{d}\mu\right\}_{j=0}^{\infty}$ je ohraničená, $k_j \in L_1$ a $k_j \searrow h_n$, je $h_n \in L_1$,

$$\int h_n \mathrm{d}\mu = \lim \int k_j \mathrm{d}\mu \geq \int g_n \mathrm{d}\mu - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Máme teda

$$h_n \in L_1, h_n \leq h_{n+1}\,(n = 1, 2, \cdots), h_n \nearrow \liminf g_n = f$$

Musíme dokázať, že $\left\{\int h_n \mathrm{d}\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená. Ale

$$\int h_n \mathrm{d}\mu \leq \int g_n \mathrm{d}\mu$$

a postupnosť $\left\{\int g_n \mathrm{d}\mu\right\}_{n=+}^{\infty}$ je zhora ohraničená. Skutočne

$$\begin{aligned}
\int g_2 \mathrm{d}\mu &= \int (g_1 + (g_2 - g_1)) \,\mathrm{d}\mu = \int g_1 \mathrm{d}\mu + \int (g_2 - g_1) \,\mathrm{d}\mu \leq \\
&\leq \int g_1 \mathrm{d}\mu + \int |g_2 - g_1| \,\mathrm{d}\mu = \\
&= \int g_1 \mathrm{d}\mu + \varrho(g_1, g_2) < \int g_1 \mathrm{d}\mu + \frac{1}{2} \\
\int g_3 \mathrm{d}\mu &= \int g_2 \mathrm{d}\mu + \int (g_3 - g_2) \,\mathrm{d}\mu \leq \\
&\leq \int g_2 \mathrm{d}\mu + \varrho(g_2, g_3) < \int g_1 \mathrm{d}\mu + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}
\end{aligned}$$

$\ldots$

Úplnou indukciou sa dokáže

$$\int g_n \mathrm{d}\mu < \int g_1 \mathrm{d}\mu + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Pre každé $n = 1, 2, 3, \cdots$ teda platí

$$\int g_n \mathrm{d}\mu < \int g_1 \mathrm{d}\mu + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \int g_1 \mathrm{d}\mu + 1.$$

Preto $f \in L_1$ a $\lim \int h_n \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu$. Odtiaľ dostávame ($g_n \geq h_n, h_n \leq f$), že

$$\begin{aligned} \varrho(f, g_n) &\leq \varrho(g_n, h_n) + \varrho(h_n, f) = \\ &= \int g_n \mathrm{d}\mu - \int h_n \mathrm{d}\mu + \int f \mathrm{d}\mu - \int \mathrm{h_n d}\mu \\ &\leq \int f \mathrm{d}\mu - \int h_n \mathrm{d}\mu + \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

odkiaľ vyplýva

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \varrho(f, g_n) &\leq \lim_{n\to\infty} \left(\int f \mathrm{d}\mu - \int h_n \mathrm{d}\mu + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \\ = \int f \mathrm{d}\mu - \lim_{n\to\infty} \int h_n \mathrm{d}\mu &= \int f \mathrm{d}\mu - \int f \mathrm{d}\mu = 0 \end{aligned}$$

čiže

$$\lim \varrho(f, g_n) = 0$$

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo. Vyberme také N, aby pre všetky $m, n > N$ bolo $\varrho(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Podľa predchádzajúceho existuje i_0 také, že pre všetky $i > i_0$ platí $\varrho(f, g_i) = \varrho(f, f_{n_i}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Vezmime také $i > i_0$, aby $n_i > N$. Potom pre $n > N$ je $\varrho(f_n, f) \leq \varrho(f_n, f_{n_i} + \varrho(f_{n_i}, f)) < \varepsilon$.
Teda skutočne $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(f_n, f) = 0$ □

CVIČENIA

1. Pomocou definície integrálu vypočítajte $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \mathrm{d}x$

2. Dokážte, že je integrovateľná (napr. na intervale $\langle 0, 1\rangle$) tzv. Dirichletova funkcia : $f(x) = 0$ pre x iracionálne, $f(x) = 1$ pre x racionálne. Dokážte, že $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$

   Návod 6 *Nech $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť všetkých racionálnych čísiel z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Definujme $f_n(r_i) = 1\,(i = 1, \cdots, n)$, inak $f_n(x) = 0$*

3. Pomocou Newton-Lebnizovej formuly vypočítajte
   $\int\limits_0^1 x \mathrm{d}x, \int\limits_0^1 x^2 \mathrm{d}\mu, \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \mathrm{d}x$

4. Matematickou indukciou dokážte vzťahy

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2}, \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

5. Dokážte tzv. Lebesguovu vetu o pokrytí: Ak $\langle a, b\rangle \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, kde U_i sú otvorené intervaly, tak existuje $\delta > 0$ také, že $|x - y| < \delta$ implikuje $x, y \in U_n$ pre nejaké n.

   Návod 7 *Nech $\{x_1, \cdots, x_k\}$ je množina hraničných bodov intervalov U_i; $\delta = \min |x_i - x_j|$*

6. Pomocou predchádzajúceho cvičenia a Borelovej vety o pokrytí dokážte, že každá funkcia spojitá na $\langle a, b\rangle$ je rovnomerne spojitá t.j. k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pre všetky $x, y \in \langle a, b\rangle$ platí implikácia $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

7. Dokážte, že k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ a ľubovoľnej integrovateľnej funkcii f existujú $g, h \in P^+$ tak, že $f = g - h$ a $\int g \mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

8. Dokážte duálne tvrdenie (pre nerastúce postupnosti) k Beppo-Leviho vete (27).

9. Dokážte toto tvrdenie (Fatouova lema): Ak f_n sú integrovateľné funkcie, $f_n \geq g\, (n = 1, 2, \cdots)$, kde g je integrovateľná a $\left\{\int f_n \mathrm{d}\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená , tak $\liminf f_n$ je integrovateľná a $\int \liminf f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int f_n \mathrm{d}\mu$.

   Návod 8 $\liminf f_n = \lim g_n$, *kde* $g_n = \inf\limits_{i \geq n} f_i$; $\int g_n \mathrm{d}\mu \leq \inf\limits_{i \geq n} \int f_i \mathrm{d}\mu$

10. Dokážte duálne tvrdenie k tvrdeniu z cvičenia 9.

11. Dokážte túto vetu (tiež sa zvykne nazývať Fatouova lema): Ak f_n sú nezáporné integrovateľné, $f = \lim f_n$ a $\left|\int f_n\right| < c\, (n = 1, 2, \cdots)$, tak f je integrovateľná a $\int f \mathrm{d}\mu \leq c$.

12. Sformulujte a dokážte silnejšie varianty Lebesguovej vety (33) a Fatouovej lemy (cvič. 9 resp. 11) pomocou konvergencie skoro všade (podobne ako veta 37).

13. Pomocou vety 34 a 12 dokážte: Ak je f integrovateľná na $(-\infty, \infty)$ (podľa Lebesguovej miery), tak $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} f(x)\mathrm{d}x$.

    Sformulujte podobné tvrdenia pre $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ a $\int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

14. Nech μ je miera definovaná na $\sigma-$okruhu S. Dokážte, že systém všetkých množín konečnej miery tvorí $\delta-$okruh.

15. Pomocou cvičení 16 a 17 z kap. 2 a viet 35, 38 dokážte, že množina $E \subset (-\infty, \infty)$ má Lebesguovu mieru 0 vtedy a len vtedy, keď k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje postupnosť $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ otvorených intervalov taká, že $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

16. Pokúste sa prispôsobiť dôkaz vety 42 pre rovinu; namiesto intervalu $\langle a, b\rangle$ treba $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$.(pozri tiež kap. 2 cvičenie 22).

LEBESGUOV-STIELTJESOV INTEGRÁL

DISTRIBUČNÁ FUNKCIA NÁHODNEJ PREMENNEJ

Hneď na začiatku kapitoly urobíme dohovor, ktorý bude platiť v celej kapitole. Nech $\mathscr{B}$ je systém všetkých borelovských množín na priamke, μ je miera na $\mathscr{B}$. Funkciu f definovanú na $(-\infty, \infty)$ budeme nazývať integrovateľnou (vzhľadom na μ) iba vtedy, keď je súčasne $\mathscr{B}-$merateľná (t.j. keď
$E \in \mathscr{B} \Rightarrow f^{-1}(E) \in \mathscr{B}$). Videli sme, že aj pri tomto ohraničení má systém integrovateľných funkcií rozumné vlastnosti. Pritom f je integrovateľná (v tomto zmysle) vtedy a len vtedy, keď je rozdielom dvoch funkcií z $P^+(\mathscr{B})$.
Ďalej $g \in P^+(\mathscr{B})$, ak existuje neklesajúca postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných, $\mathscr{B}-$jednoduchých funkcií taká, že $\left\{\int g_n \mathrm{d}\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a
$g(x) = \lim g_n(x)$ pre všetky x.
V prvom paragrafe sa nedozvieme nič o integráli. Z hľadiska teórie integrálu pôjde vlastne len o príklad, ktorý však má dôležitú úlohu v teórii pravdepodobnosti.
Povedali sme už skôr, že náhodná premenná je vlastne konečná merateľná funkcia. Predsa však zavedieme pre náhodné premenné jedno z označení, ktoré je v teórii pravdepodobnosti obvyklejšie. Náhodné premenné budeme označovať malými gréckymi písmenami, napr. ξ, η, ζ a pod. Možno sa nebolo treba o tom zvlášť zmieňovať, ale text takto písaný pôsobí na čitateľa celkom iným dojmom.
Keď sme už pri označovaní, v teórii pravdepodobnosti je zvykom používať trochu úspornejšie označenia. Tak napr. namiesto $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ píšeme tiež $\xi < x$, teda

$$P(\xi < x) = P(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) = P\big(\xi^{-1}((-\infty, x))\big).$$

Vráťme sa k distribučnej funkcii náhodnej premennej a zhrňme čo máme dané. Daný je základný priestor $\Omega, \sigma-$algebra $\mathscr{S}$ podmnožín množiny Ω a pravdepodobnosť P na systéme $\mathscr{S}$, t.j. miera definovaná na $\mathscr{S}$ taká, že $P(\Omega) = 1$ Náhodná premenná je konečná reálna funkcia ξ taká, že $\xi^{-1}((-\infty, x)) \in \mathscr{S}$ pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$.

Definícia 36 *Distribučnou funkciou náhodnej premennej ξ rozumieme funkciu F definovanú na $(-\infty, \infty)$ vzťahom*

$$F(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) = P\big(\xi^{-1}((-\infty, x))\big) = P(\xi < x)$$

Čitateľovi možno nebudú celkom bežné nasledujúce označenia. Preto ich uvádzame $F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x), F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x), F(a+) = \lim\limits_{x\to a^+} F(x), F(a-) = \lim\limits_{x\to a^-} F(x)$. Pripomeňme, že funkcia F je spojitá zľava, ak $F(a-) = F(a)$. V dôkaze nasledujúcej vety použijeme charakterizáciu spojitosti zľava pomocou postupností (pzri cvič. 1).

Veta 49 *Nech F je distribučná funkcia náhodnej premennej ξ. Potom F je neklesajúca, spojitá zľava v každom bode a $F(\infty) = 1, F(-\infty) = 0$*

Dôkaz. Nech $x < y$. Potom $\xi^{-1}((-\infty, x)) \subset \xi^{-1}((-\infty, y))$, teda podľa vety 10 je:

$$F(x) = P\big(\xi^{-1}((-\infty, x))\big) \le P\big(\xi^{-1}((-\infty, y))\big) = F(y)$$

Nech $x \in (-\infty, \infty)$. K tomu, aby sme dokázali, že F je spojitá v bode x zľava stačí dokázať toto: Ak $x_n \nearrow x$ (t.j.$x_n \leq x_{n+1}$ pre všetky n a $\lim x_n = x$), tak $\lim F(X_n) = F(x)$. Podľa predchádzajúceho je $F(x) \geq F(x_n)$. Ďalej z vety 10 vyplýva

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_n) &= P(\xi < x) - P(\xi < x_n) = \\ &= P((\xi < x) - (\xi < x_n)) = P(x_n \leq \xi < x) \end{aligned}$$

Položme $E_n = \{\omega : x_n \leq \xi(\omega) < x\}$. Pretože $x_n \nearrow x$, je $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$ a $E_n \supset E_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, teda

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} P(E_n) &= \lim_{n\to\infty} P(x_n \leq \xi < x) = \\ &= \lim_{n\to\infty} (F(x) - F(x_n)) = F(x) - \lim_{n\to\infty} F(x_n) \end{aligned}$$

Zostávajúce dve tvrdenia dokážeme podobne. Položme
$A_n = \xi^{-1}((-\infty, -n)), B_n = \xi^{-1}((-\infty, n))$ Potom
$A_n \supset A_{n+1}, B_n \subset B_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Okrem toho

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}((-\infty, -n)) = \xi^{-1}\left(\bigcap_{n+1}^{\infty} (-\infty, -n)\right)$$

$$\xi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}((-\infty, n)) = \xi^{-1}\left(\bigcup_{n+1}^{\infty} (-\infty, n)\right) = \xi^{-1}((-\infty, \infty)) = \Omega$$

teda

$$\begin{aligned} F(\infty) &= \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} P\big(\xi^{-1}(-\infty, n)\big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P(\Omega)0 = 1, \\ F(-\infty) &= \lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim_{n\to\infty} P\big(\xi^{-1}(-\infty, -n)\big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

Tým je dôkaz vety skončený. □

Pripojme niekoľko poznámok. Predovšetkým je zaujímavé, že platí obrátená veta k vete 49. Pretože k tomu budeme potrebovať vedieť niečo o Lebesguovej-Stieltjesovej miere, príslušný výsledok sformulujeme až v nasledujúcom paragrafe. Inou zaujímavosťou je spôsob, akým sme dokázali vetu 49. Hlavným prostriedkom v tom dôkaze bola $\sigma-$aditívnosť pravdepodobnosti P. Vidno teda, že už pri dôkaze takejto jednoduchej a všeobecne známej vety je potrebné použiť axiomatický systém, v ktorom vlastnosť aditívnosti platí pre nekonečne veľa udalostí.
Všimnime si zvlášť ešte jednu vlastnosť, ktorú sme použili mimochodom a ktorá má veľký význam:
Ak $a < b$, tak $P\,(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$.
Skutočne podľa vety 10 je
$P\,(a \leq \xi < b) = P(\{\omega : \xi(\omega) < b\} - \{\omega : \xi(\omega) < a\}) =$
$P\big(\xi^{-1}((-\infty, b))\big) - P\big(\xi^{-1}((-\infty, a))\big) = F(b) - F(a)$(Náročky sme na tomto mieste a možno aj inde, použili viaceré spôsoby zápisu.)
V teórii pravdepodobnosti sa snažíme vyjadrovať pojmy pomocou distribučnej funkcie možno vymedziť medzi náhodnými premennými dve veľké triedy: diskrétne a spojité náhodné premenné. Intuitívne: diskrétna náhodná premenná nadobúda povedzme len konečný počet hodnôt (napr. počet bodiek na kocke, počet zdravých zubov u dospelého človeka), zatiaľ čo spojitá nadobúda hodnoty "spojite"(napr. výška dospelého človeka), teda množina hodnôt je interval. Diskrétna náhodná premenná nadobúa izolované hodnoty, zatiaľ čo spojitá izolované hodnoty nemá. Mohli by sme teda povedať, že diskrétna náhodná premenná nadobúda konečne veľa hodnôt zatiaľ čo spojitá

náhodná premenná má za množinu hodnôt interval. To je síce možná, ale v spojitom prípade nevyhovujúca definícia. Všimnime si skôr distribučnú funkciu.
Rozoberme najprv diskrétny prípad. Lahko si na príklade ujasníme, že distribučná funkcia je v tomto prípade "schodkovitá". Urobíme to tak, aby mohla mať aj nekonečne veľa schodíkov.Pravda, spočítateľne veľa (32).

Definícia 37 *Náhodná premenná ξ sa nazýva diskrétna, ak nadobúda spočítateľne veľa hodnôt.*

Rozmyslime si ešte, ako bude vyzerať distribučná funkcia náhodnej premennej. Nech $\{x_1, x_2, \cdots\}$ sú hodnoty ξ. Položme $p_i = P(\xi = x_i) = P(\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}) = P\big(\xi^{-1}(\{x_i\})\big)$. Nech $x \in (-\infty, \infty)\,, A = \{\omega : \xi(\omega) < x\}$. Zrejme $\xi(\omega)$ vtedy a len vtedy, ak $\xi(\omega) = x_i$ pre nejaké $x_i < x$. Teda $A = \bigcup\limits_{x_i<x} \{\omega : \xi(\omega) = x_i\} = \bigcup\limits_{x_i<x} A_i$, pričom množiny $A_i = \xi^{-1}(\{x_i\})$ sú navzájom disjunktné. Preto

$$F(x) = P(A) = \sum_{x_i<x} P(\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}) = \sum_{x_i<x} p_i$$

Práve odvodený fakt snáď netreba interpretovať. Mali by sme si skôr všimnúť konvergenciu radu vystupujúceho na pravej strane. Je známe, že ak konverguje rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, tak konverguje nielen rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, ale aj každý rad, ktorý vznikne z neho permutáciou, teda napr. rad $a_1 + a_3 + a_2 + a_4 + a_5 + a_7 + a_6 + a_8 + \cdots$ alebo rad $a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + \cdots$. Podrobnejšie: rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je permutáciou radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, ak existuje také prosté zobrazenie $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ množiny všetkých prirodzených čísiel na seba, že $b_n = a_{p(n)}$. V prvom príklade je napr. $p(4k+1) = 4k+1, p(4k+2) = 4k+3, p(4k+3| = 4k+2\,(k = 0, 1, 2, \cdots)\,, p(4k) = 4k\,(k = 1, 2, \cdots)$. Príslušná veta hovorí: Ak rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, tak konverguje ľubovoľný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, ktorý vznikne permutáciou radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; okrem toho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Vidíme, že v prípade miery μ a konvergencie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ môže tento rad ľubovoľne permutovať, pretože je to rad nezáporných čísiel, teda absolútne konvergentný.
Vráťme sa teraz k spojitým náhodným premenným. Často sa spojitá náhodná premenná definuje ako náhodná premenná, ktorej distribučná funkcia je spojitá. Ani takáto definícia však nie je vyhovujúca. Pod spojitou náhodnou premennou si predstavujeme obvykle náhodnú premennú, ktorá má hustotu. Reálna funkcia f je hustota náhodnej premennej ξ, ak $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. To má svoj geometrický význam.

Definícia 38 *Nech ξ je náhodná premenná, F jej distribučná funkcia. Náhodná premenná ξ sa nazýva spojitá ak existuje nezáporná integrovateľná funkcia f definovaná na $(-\infty, \infty)$ taká, že pre všetky $x \in (-\infty, \infty)$ sa:*

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

Otázne je v akom zmysle treba chápať integrál vpravo pre nás je prirodzené, že ho budeme chápať v lebesguovskom zmysle; tým dostaneme najširšiu triedu spojitých náhodných premenných resp. ich hustôt. Je však možné ohraničiť sa len na riemannovsky integrovateľné funkcie f. Obvykle sa žiada ešte viac: predpokladá sa, že f je po častiach spojitá a integrovateľná funkcia. Už touto triedou obsiahneme všetky v praxi sa vyskytujúce náhodné premenné. Ohraničením sa len na spojité integrovateľné funkcie už nedosiahneme ten efekt; nedostaneme napr. tzv. rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti. Termín rozdelenie pravdepodobnosti je iný názov pre hustotu. (Terminologické varianty sú tu, pravda, ešte oveľa bohatšie.) Hovorievame teda napr. o

binomickom rozdelení pravdepodobnosti, Poissonovom, normálnom, rovnomernom rozdelení pravdepodobnosti a pod.
Ak je f spojitá a integrovateľná funkcia, tak $F'(x) = f(x)$ pre všetky x. Názornú interpretáciu tohto faktu, založenú na definícii derivácie, nebudeme uvádzať. Naproti tomu spomenieme, že v prípade spojitej náhodnej premennej ξ máme:

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

čo sa rovná plošnému obsahu obrazca ohraničeného grafom funkcie f a priamkami $x = a, x = b, y = 0$
Všimnime si, že pri spojitej náhodnej premennej ξ platí pre každé číslo x rovnosť

$$P(\xi = x) = 0$$

Dôkaz tohto faktu nie je až taký jednoduchý, ako by sa zdalo na prvý pohľad. Aby sme dokázali uvedenú rovnosť, definujme na systéme $\mathscr{B}$ všetkých borelovských množín dve funkcie $\nu, \varkappa$ rovnosťami

$$\nu(E) = P\big(\xi^{-1}(E)\big), \varkappa(E) = \int\limits_E f\mathrm{d}\mu$$

pričom f je hustota náhodnej premennej ξ, μ Lebesguova miera. Funkcie $\nu, \varkappa$ sú miery. O funkcii ν to možno ľahko priamo dokázať cvič. 13 kap. 2; pokiaľ ide o funkciu $\varkappa$, vyplýva to z vety 34 navyše

$$\begin{aligned}\nu(\langle a, b)) = P\big(\xi^{-1}(\langle a, b))\big) &= P(a \le \xi < b) = \\ = F(b) - F(a) &= \int\limits_{\langle a,b)} f\mathrm{d}\mu = \\ = \varkappa(\langle a, b))\end{aligned}$$

Nech $\mathscr{R}$ je najmenší okruh nad systémom $\{\langle a, b) : a \le b\}$ a $E \in \mathscr{R}$. Potom $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i), \langle a_i, b_i)$ sú navzájom disjunktné, teda

$$\nu(E) = \sum_{i=1}^{n} \nu(\langle a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{n} \varkappa(\langle a_i, b_i)) = \varkappa(E)$$

Vidíme, že $\nu, \varkappa$ sú dve konenčné miery, ktoré sa zhodujú na okruhu $\mathscr{R}$. Preto sa podľa vety 35 zhodujú aj na najmenšom $\sigma-$okruhu $\mathscr{S}(\mathscr{R}) = \mathscr{B}$ nad $\mathscr{R}$, teda $\nu = \varkappa$. Máme preto

$$\begin{aligned}P(\xi = x) = P\big(\xi^{-1}(\{x\})\big) &= \nu(\{x\}) = \\ = \varkappa(\{x\}) &= \int\limits_{\{x\}} f\mathrm{d}\mu = f(x)\mu(\{x\}) = 0\end{aligned}$$

pretože pre Lebesguovu mieru μ platí $\mu(\{x\}) = 0$.
Distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej je naozaj spojitá. V prípade, že f je lebesguovsky integrovateľná (a to je u nás najvšeobecnejší prípad) to dokážeme takto: Položme $E_n = \big(-\infty, x + \frac{1}{n}\big)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Potom $E_n \supset E_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = (-\infty, x\rangle$. Preto podľa vety 10 a vety 13 platí:

$$\begin{aligned}F(x) &= P\big(\xi^{-1}((-\infty, x\rangle)\big) - P\big(\xi^{-1}(\{x\})\big) = \\ &= P\left(\xi^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}(E_n)\right) = \\ &= \lim P\big(\xi^{-1}(E_n)\big) = \lim F\left(x + \frac{1}{n}\right) = F(x+)\end{aligned}$$

teda F je spojitá v bode x (rovnosť $F(x) = F(x-)$ platí vždy).

Možno trochu predbehneme udalosti, ak si vypočítame vo všeobecnosti $P(\{\omega : \xi(\omega) = x\})$. Položme $E_n = \langle x, x + \frac{1}{n})$. Potom $E_n \supset E_{n+1}\,(n = 1, 2, \cdots)$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\}$. Preto

$$\begin{aligned} P(\xi = x) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}(E_n)\right) = \lim_{n\to\infty} P\big(\xi^{-1}(E_n)\big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(x \le \xi < x + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \lim \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right) = F(x+) - F(x) \end{aligned}$$

Teda pravdepodobnosť nadobudnutia nejakej hodnoty x sa rovná "skoku"distribučnej funkcie v tom bode. Ak je F v tom bode spojitá, tak $P(\{\omega : \xi(\omega) = x\}) = 0$

LEBESGUOVA-STIELTJESOVA MIERA

Veta 50 *Nech $\mathscr{P}$ je systém všetkých intervalov tvaru $\langle a, b)$, kde $a \leq b$. Nech F je reálna funkcia definovaná na intervale $(-\infty, \infty)$, neklesajúca a spojitá zľava v každom bode. Potom je množinová funkcia μ definovaná na $\mathscr{P}$ rovnosťou $\mu(\langle a, b)) = F(b) - F(a)$ $\sigma-$aditívna.*

Dôkaz. *) Predovšetkým uvážme, že z inklúzie $\langle a, b) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$ vyplýva $F(b) - F(a) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i))$. Ak totiž vyberieme $j_i \, (i = 1, \cdots, k)$ tak, že $a \in (a_{j_1}, b_{j_1}), b_{j_1} \in (a_{j_2}, b_{j_2}), \cdots, b_{j_{k-1}} \in (a_{j_k}, b_{j_k}), b \in (a_{j_k}, b_{j_k})$, dostaneme:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) \leq F(b_{j_k}) - F(a_{j_1}) = \\ &= \sum_{i=2}^{k} \big(F(b_{j_i}) - F\big(b_{j_{i-1}}\big)\big) + F(b_{j_1}) - F(a_{j_1}) \leq \\ &\leq \sum_{i=2}^{k} (F(b_{j_i}) - F(a_{j_i})) + F(b_{j_1}) - F(a_{j_1}) = \\ &= \sum_{i=2}^{k} (F(b_{j_i}) - F(a_{j_i})) \leq \sum_{i=2}^{k} (F(b_i) - F(a_i)) \end{aligned}$$

Nech teraz $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in \mathscr{P}, E_i$ sú navzájom disjunktné. Položme $E = \langle a, b), E_i = \langle a_i, b_i) \, (i = 1, 2, \cdots)$. Nech ε je ľubovoľné kladné číslo. Pretože F je spojitá zľava v bode a_i, existuje také $c_i < a_i$, že $F(a_i) - F(c_i) < \varepsilon 2^{-i}$; pritom $\langle a_i, b_i) \subset (c_i, b_i)$. Pretože F je spojitá zľava v bode b, existuje také $c < b$, že $c \geq a$ a $F(b) - F(c) < \varepsilon$. Potom

$$\langle a, c\rangle \subset \langle a, b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i, b_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (c_i, b_i)$$

Podľa borelovej pokrývacej vety existuje také n, že

$$\langle a, c\rangle \subset \bigcup_{i=1}^{n} (c_i, b_i)$$

teda

$$F(c) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(c_i))$$

Preto platí:

$$\begin{aligned} \mu(E) = \mu(\langle a, b)) = F(b) - F(a) < F(c) - F(a) + \varepsilon \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(c_i)) + \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} \left(F(b_i) - F(c_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) + \varepsilon = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(\langle a_i, b_i)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

*)Pretože podobný dôkaz sme už robili (išlo vlastne o špeciálnejšie tvrdenie - veta 7) budeme stručnejší.

teda $\mu(E) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. Na druhej strane (ak usporiadame $E_1, \cdots, E_n$ podľa "veľkosti zľava doprava $E_{j_1}, \cdots, E_{j_n}$) máme:

$$\begin{aligned}\mu(E) = F(b) - F(a) = F(b) - F(b_{j_n}) + \sum_{i=1}^{n} (F(b_{j_i}) - F(a_{j_i}))+ \\ + \sum_{i=2}^{n} \big(F(a_{j_i}) - F\big(b_{j_{i-1}}\big)\big) + F(a_{j_1}) - F(a) \geq \\ \geq \sum_{i=1}^{n} (F(b_{j_i}) - F(a_{j_i})) = \\ = \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(c_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\end{aligned}$$

pre každé n , teda $\mu(E) \geq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$. Tým je veta dokázaná. □

Veta 51 *Nech F je ľubovoľná neklesajúca funkcia spojitá zľava v každom bode $x \in (-\infty, \infty)$. Potom existuje práve jedna miera μ_F definovaná na systéme $\mathscr{B}$ všetkých borelovských množín taká, že $\mu_F(\langle a, b)) = F(b) - F(a)$ pre všetky $a \leq b$*

Dôkaz. Opäť opakujem už skôr uvedené myšlienky. Označme znakom $\mathscr{R}$ najmenší okruh nad $\mathscr{P}$. Podľa vety 9 $\mathscr{R}$ pozostáva so všetkých množín tvaru $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, kde $E_i \in \mathscr{P}, E_i$ navzájom disjunktné. Taktiež vidno, že ak $E \in \mathscr{R}, E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m} F_j, E_i, F_j \in \mathscr{P}$ a tak E_i, ako aj F_j sú navzájom disjunktné, tak $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu(F_j)$. Môžeme teda definovať na $\mathscr{R}$ funkciu $\overline{\mu}(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i).\overline{\mu}$ je nezáporná, $\overline{\mu}$ je rozšírením funkcie $\mu, \overline{\mu}(\emptyset) = 0$. Navyše $\overline{\mu}$ je $\sigma-$aditívna, čo sa dokáže tak isto, ako vo vete 8. Dokázali sme teda, že $\overline{\mu}$ je miera na okruhu $\mathscr{R}$. Podľa vety 35 existuje na $\mathscr{B} = \mathscr{S}(\mathscr{R})$ práve jedna miera, ktorá je rozšírením $\overline{\mu}$
Máme ešte dokázať, že existuje len jedna miera, ktorá je rozšírením μ (definovanej na $\mathscr{P}$). Ale ak ν je miera na $\mathscr{B}$, ktorá je rozšírením μ, tak pre $E \in \mathscr{R}$ $(E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i, E_i \in \mathscr{P}, E_i$ navzájom disjunktné)
$\nu(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu(E-i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \overline{\mu(E)}$. Preto ν je aj rozšírením $\overline{\mu}$. A pretože rozšírenie $\overline{\mu}$ je jediné, platí: $\nu = \mu_F$. □

Definícia 39 *Miera μ_F spomínaná vo vete 51 sa nazýva Lebesguova-Stieltjesova miera indukovaná funkciou F*

Pripomeňme aspoň, že Lebesguova miera je špeciálnym prípadom Lebesguovej-Stieltjesovej miery. Je to Lebesguova-Stieltjesova miera indukovaná funkciou $F(x) = x$. V tomto prípade totiž máme $\mu_F(\langle a, b)) = F(b) - F(a) = b - a$
Náhodným premenným zodpovedajú určité distribučné funkcie a teda aj určité Lebesguove-Stieltjesove miery. (Pravda, nie každá neklesajúca funkcia spojitá zľava je distribučnou funkciou náhodnej premennej). Rozoberme si teraz zvlášť diskrétny a spojitý prípad.

Veta 52 *Nech $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ je konvergentný rad nezáporných čísiel, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ľubovoľná prostá postupnosť rálnych čísiel. Položme:*

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Potom je funkcia F neklesajúca a spojitá zľava.

Dôkaz. Nech $x < y$. Potom $F(y) - F(x) = \sum\limits_{x \leq x_i < y} p_i \geq 0$, teda $F(y) \geq F(x)$. Nech x je teraz pevné, dokážeme, že F je spojitá v bode x zľava. Nech ε je ľubovoľné kladné číslo. Pretože rad $\sum p_i$ je konvergentný, existuje také n, že $\sum\limits_{i=n}^{\infty} < \varepsilon$. Vezmime $\delta > 0$ tak, aby sa v intervale $(x - \delta, x)$ nenachádzalo žiadne z čísiel $x_1, \cdots, x_{n-1}$. Potom pre $y =\in (x - \delta, x\rangle$ je

$$F(x) - F(y) = \sum_{y \leq x_i < x} p_i < \sum_{i=n}^{\infty} p_i < \varepsilon$$

□

Veta 53 *Nech f je (lebesguovsky) integrovateľná nezáporná funkcia na $(-\infty, \infty)$. Potom funkcia F definovaná vzťahom*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

je neklesajúca a spojitá zľava.

Dôkaz. Stačí si rozmyslieť spojitosť. Nech $x_n \nearrow x$ Položme $E_n = (-\infty, x_n)\,(n = 1, 2, \cdots)$. Potom $E_n \subset E_{n+1}\,(n = 1, 2, \cdots)$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} = (-\infty, x)$. Preto podľa vety 34 a vety 12 platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \lim \int_{E_n} f(t)\mathrm{d}t = \lim \int_{-\infty}^{x_n} f(t)\mathrm{d}t = \lim F(x_n)$$

□

Z predchádzajúceho paragrafu nám zostáva ešte dokázať opak vety 49. K tomuto dôkazu sme potrebovali existenciu Lebsguovej-Stieltjesovej miery.

Veta 54 *Nech F je neklesajúca a spojitá zľava (v každom bode) funkcia, $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$. Potom existuje taká náhodná premenná ξ, že F je jej distribučná funkcia.*

Dôkaz. Nech $\Omega = (-\infty, \infty)$, $\mathscr{S}$ je systém všetkých borelovských množín, $P = \mu_F$ je Lebesguova-Stieltjesova miera indukovaná funkciou F. Dokážeme, že P je pravdepodobnosť. Skutočne:

$$\begin{aligned} \mu_F(\Omega) &= \lim \mu_F(\langle -n, n)) = \\ &= \lim (F(n) - F(-n)) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 \end{aligned}$$

Teda $(\Omega, \mathscr{S}, \mu_F)$ je prevdepodobnostný priestor.
Definujme teraz na Ω náhodnú premennú ξ vzťahom $\xi(\omega) = \omega$. ξ je zrejme náhodná premenná, lebo ak E je borelovská množina, tak $\xi^{-1}(E) = E$ je tiež borelovská, teda patrí do $\mathscr{S}$.
Nech G je distribučná funkcia náhodnej premennej ξ, potom

$$\begin{aligned} G(x) &= P\big(\xi^{-1}((-\infty, x))\big) = P((-\infty, x)) = \\ &= \mu_F((-\infty, x)) = \lim_{n \to \infty} \mu_F(\langle x - n, x)) = \\ &= \lim_{n \to \infty} (F(x) - F(x - n)) = F(x) - F(-\infty) = F(x) \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že F je distribučná funkcia náhodnej premennej ξ □

LEBESGUOV-STIELTJESOV INTEGRÁL

Definícia 40 *Nech F neklesajúca funkcia spojitá zľava v každom bode, μ_F je Lebesguova-Stieltjesova miera indukovaná funkciou F. Potom integrál $\int f \mathrm{d}\mu_F$ nazývame Lebesguovým-Stieltjesovým integrálom (podľa funkcie F) a označujeme tiež znakmi*

$$\int f \mathrm{d}F = \int f(x) \mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}F(x)$$

Ďalej definujeme:

$$\int_E f \mathrm{d}F = \int_{-\infty}^{\infty} f \chi_E \mathrm{d}F$$

Poznamenajme, že lebesguov integrál (na priamke) je špeciálnym prípadom Lebesguovho-Stieltjesovho, pretože Lebesguova miera je špeciálnym prípadom Lebesguovej-Stieltjesovej. Na druhej strane Lebesguov-Stieltjesov integrál je špeciálnym prípadom abstraktného integrálu (podľa miery μ), preto nebudeme zvlášť uvádzať jeho vlastnosti.
Ukážeme iba ako sa Lebesguov-Stieltjesov integrál vypočíta v niektorých špeciálnych prípadoch.

Veta 55 *Ak funkcia F je definovaná práve tak ako vo vete 52, tak merateľná funkcia f je integrovateľná (podľa F) vtedy a len vtedy, keď $\sum f(x_i)p_i$ absolútne konverguje a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}F(x) = \sum f(x_i)p_i$$

Dôkaz. Predovšetkým uvážme, že $\mu_F((-\infty, \infty)) = \sum p_i$. Preto $\mu_F((-\infty, \infty) - \bigcup\{\, x_i\}) = \mu_F((-\infty, \infty)) - \mu_F(\{x_i\}) = \sum p_i - \sum p_i = 0$. Teda podľa vety 34 lemy 24 platí (v prípade, že f je integrovateľná)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{d}F(x) &= \int_{R_1 - \bigcup\{x_i\}} f(x) \mathrm{d}F(x) + \int_{\bigcup\{x_i\}} f(x) \mathrm{d}F(x) = \\ &= \sum \int_{\{x_i\}} f(x) \mathrm{d}F(x) = \\ &= \sum f(x_i) \mu_F(\{x_i\}) = \sum f(x_i) p_i \end{aligned}$$

Ak je funkcia f integrovateľná, tak je integrovateľná aj $|f|$, odkiaľ dostávame, že $\int |f| \,\mathrm{d}F = \sum |f(x_i)|\, p_i < \infty$, teda rad $\sum f(x_i)pi$ konverguje absolútne.
Predpokladajme teraz, že $\sum f(x_i)p_i$ konverguje absolútne. Potom konvergujú aj $\sum f^+(x_i)p_i$ a $\sum f^-(x_i)p_i$. Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť jednoduchých funkcií, $f_n \nearrow f^+$.

Ak g je ľubovoľná jednoduchá funkcia, tak je integrovateľná (podľa F), pretože $\mu_F(R_1) < \infty$. Ak $g = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}$, tak

$$\int g \mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_F(E_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{x_j \in E_i} p_j$$

Preto

$$\int f_n \mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} \sum_{x_j \in E_i^n} p_j \leq \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{x_j \in E_i^n} f^+(x_j) p_j \leq \sum f^+(x_j) p_j$$

Pričom $f_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} \alpha_i^{(n)} \chi_{E_i^n}$(zrejme $\alpha_i^{(n)} \leq f^+(x_j)$ pre $x_j \in E_i^n$) čo platí pre všetky n. Odtiaľ vidno, že f^+ je integrovateľná. Podobne sa dokáže, že je integrovateľná funkcia f^-, teda aj f. $\square$

Veta 56 *Nech F je funkcia definovaná tak ako vo vete 53. Potom je g integrovateľná (podľa F) vtedy a len vtedy, keď existuje $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$. V tom prípade platí*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x$$

Dôkaz. Definujme najprv na systéme všetkých borelovských množín mieru μ vzťahom $\mu(E) = \int\limits_E f(x)\mathrm{d}x$. Ak je $E \in \mathscr{P}$, teda $E = \langle a, b)$, tak

$$\begin{aligned} \mu(E) = \int_{\langle a,b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\langle -\infty,b)} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\langle -\infty,a)} f(x)\mathrm{d}x = \\ = F(b) - F(a) = \mu_F(E) \end{aligned}$$

Podľa vety 51 je však $\mu = \mu_F$, teda pre všetky E borelovské platí:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E \mathrm{d}F = \int \chi_E \mathrm{d}\mu_F = \mu_F(E) = \mu(E) = \\ = \int_E f(x)\mathrm{d}x = \int \chi_E(x) f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ak je teraz g jednoduchá (a teda jednoducho integrovateľná), $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}, E_i$ disjunktné, tak

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}F(x) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{E_i}(x)\mathrm{d}F(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{E_i}(x) f(x)\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x) f(x)\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ak je $g \geq 0$ integrovateľná, tak existuje neklesajúca postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoducho integrovateľných funkcií taká, že $g_n \nearrow g$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \int g_n \mathrm{d}F < \infty$.

Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}F(x) = \lim \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\mathrm{d}F(x) =$$

$$= \lim \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

Posledná rovnosť vyplýva z Beppo-Leviho vety. Súčasne sme dokázali, že fg je lebesguovsky integrovateľná. Prípad ľubovolnej integrovateľnej funkcie (podľa F) je už teraz zrejmý.

Predpokladajme naopak, že existuje $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Kľúčovým je tu prípad $g \geq 0$. Vtedy vezmeme postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoduchých funkcií takú, že $g_n \nearrow g$. Pretože $f \geq 0$, je $g_n f \nearrow gf$, teda podľa Beppo-Leviho vety je:

$$\lim \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\mathrm{d}F(x) = \lim \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

Odtiaľ vyplýva, že g je integrovateľná (podľa F) a platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mu_F = \lim \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\mu_F =$$

$$= \lim \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

Vo všeobecnom prípade použijeme tú skutočnosť, že ak je intgrovateľná funkcia fg, tak sú inegrovateľné aj $(fg)^+ = fg^+$ a $(fg)^- = fg^-$. Detaily tu nebudeme uvádzať □

Predchádzajúca veta má "názorný"tvar, ak je funkcia f spojitá. V tom prípade $F'(x) = f(x), F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} F'(t)\mathrm{d}t$, teda

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)F'(x)\mathrm{d}x$$

To sa trochu podobá na substitúciu v integráli, kde tiež píšeme povedzme $z = \zeta(x), \mathrm{d}z = \zeta'(x)\mathrm{d}x$

Veta 57 *Nech F má ten istý význam ako vo vete 53 (a teda aj vo vete 56). Potom pre ľubovoľnú borelovskú množinu E platí:*

$$\int_E g(x)\mathrm{d}F(x) = \int_E g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

ak aspoň jedna strana má zmysel.

Dôkaz. Stačí vetu 56 aplikovať na merateľnú funkciu $h = g\chi_E$. □

Vety 55 a 56 (prípadne 57) sú jasnými návodmi pre výpočty, ak je "schodkovitá" alebo "spojitá". Na dvoch príkladoch si ukážeme, ako postupovať v iných prípadoch

Príklad 3 *Vypočítajte*

$$\int f(x)\mathrm{d}F(x)$$

Kde f je ľubovoľná integrovateľná funkcia a a F je definovaná nasledujúcim spôsobom: $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ ak } x \leq 0 \\ x^2, \text{ ak } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle \\ 1, \text{ ak } x > \frac{1}{2} \end{cases}$ *Zrejme*

$\mu_F\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = F\left(\frac{1}{2}+\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. *Okrem toho* $\mu_F((-\infty, 0\rangle) = 0$ *a* $\mu_F\left(\left(\frac{1}{2}, \infty\right)\right) = 0$. *Preto*

$$\int f\mathrm{d}F = \int\limits_{(-\infty,0)} f\mathrm{d}F + \int\limits_{\left(0,\frac{1}{2}\right)} f\mathrm{d}F + \int\limits_{\left\{\frac{1}{2}\right\}} f\mathrm{d}F + \int\limits_{\left(\frac{1}{2},\infty\right)} f\mathrm{d}F =$$

$$= \int\limits_{\left(0,\frac{1}{2}\right)} f(x)2x\mathrm{d}x + f\left(\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}$$

Ak napr. $f(x) = x$, *máme*

$$\int x\mathrm{d}F(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} 2x^2\mathrm{d}x + \frac{3}{8} = \frac{11}{24}$$

Príklad 4 *Vypočítajte*

$$\int f(x)\mathrm{d}F(x)$$

, *kde* $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ ak } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}, \text{ ak } x \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right\rangle (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ 1, \text{ ak } x \geq 1 \end{cases}$ *Pretože* $\mu_F\left(\left\{\frac{1}{2^n}\right\}\right) = \frac{1}{2^n}$, *platí:*

$$\int f\mathrm{d}F = \int\limits_{(-\infty,0)} f\mathrm{d}F + \int\limits_{\langle 1,\infty)} f\mathrm{d}F + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\left\{\frac{1}{2^n}\right\}} f\mathrm{d}F + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)} f\mathrm{d}F =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{2^n}\right)\mu_F\left(\left\{\frac{1}{2^n}\right\}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)} f(x)\frac{1}{2}\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} f(x)\mathrm{d}x$$

V oboch predošlých príkladoch možno funkciu F rozložiť na dve časti: schodkovitú a spojitú. Skutočne, ak položíme:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, \text{ ak } x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, \text{ ak } x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0, \text{ ak } x \leq 0 \\ x^2, \text{ ak } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}, \text{ ak } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

dostávame v 1. príklade rovnosť $F = F_1 + F_2$. V 2. príklade podobný rozklad vyzerá takto:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, \text{ ak } x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{n+1}}, \text{ ak } x \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right\rangle \\ \frac{1}{2}, \text{ ak } x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0, \text{ ak } x \leq 0 \\ \frac{x}{2}, \text{ ak } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, \text{ ak } x > 1 \end{cases}$$

Otázka či možno vo všeobecnosti každú distribučnú funkciu vyjadriť ako súčet "schodkovitej" a "spojitej", je trochu komplikovanejšia. (Čitateľa odkazujeme na literatúru: GUREVIČ-ŠILOV, § 10, HALMOS, § 32, JARNÍK, kap IX. § 3, Loomis § 11.) Ak však už taký rozklad máme, môžeme integrovať pomocou vzťahu (veta 58)

$$\int f\mathrm{d}F = \inf f\mathrm{d}F_1 + \int f\mathrm{d}F_2$$

Tak v 1. príklade máme:

$$\int x\mathrm{d}F = \int x\mathrm{d}F_1 + \int x\mathrm{d}F_2 = \frac{1}{2}\mu_{F_1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x2x\mathrm{d}x = \frac{11}{24}.$$

Veta 58 *Nech μ, ν sú miery definované na okruhu $\mathscr{R}, \lambda = \mu + \nu$. Potom*

$$\int f \mathrm{d}\lambda = \int f \mathrm{d}\mu + \int f \mathrm{d}\nu$$

ak má aspoň jedna stran zmysel

Dôkaz. Nech má zmysel pravá strana. Rovnosť je zrejmá, ak je f jednoduchá funkcia. Obvyklým limitným prechodom sa dostane pre funkcie $f \in P^+$ a teda aj pre všetky funkcie integrovateľné (vzhľadom na μ a ν).
Trochu opatrnejšie treba postupovať, ak vieme len to, že existuje $\int f \mathrm{d}\lambda$. Predovšetkým uvážme, že $\lambda \geq \mu, \lambda \geq \nu$. Nech $f \in P^+(\lambda)$, t.j. existuje taká neklesajúca postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezápoprných jednoducho integrovateľných (vzhľadom na λ) funkcií, že $\left\{\int f_n \mathrm{d}\lambda\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Pretože f_n sú integrovateľné aj vzhľadom na μ máme:

$$0 \leq \int f_n \mathrm{d}\mu \leq \int f_n \mathrm{d}\lambda$$

teda $\left\{\int f_n \mathrm{d}\mu\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a $f \in P^+(\mu)$. Podobne $f \in P^+(\nu)$ a platí:

$$\begin{aligned}
\int f \mathrm{d}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n \mathrm{d}\mu + \int f_n \mathrm{d}\nu \right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\nu = \\
&= \int f \mathrm{d}\mu + \int f \mathrm{d}\nu
\end{aligned}$$

Zvyšok dôkazu je už teraz zrejmý. $\square$

MOMENTY NÁHODNÝCH PREMENNÝCH

Vrátime sa opäť k teórii pravdepodobnosti. Už sme sa stretli s jednou charakteristikou náhodnej premennej - distribučnou funkciou. Inú charakteristiku - číselnú dávajú momenty.

Definícia 41 *Nech ξ je náhodná premenná definovaná na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathscr{S}, P)$. Ak je ξ integrovateľná, tak definujeme jej strednú hodnotu $E(\xi)$ ako číslo*

$$E(\xi) = \int \xi \mathrm{d}P$$

Definícia 42 *Počiatočným $k-$tym momentom náhodnej premennej ξ nazývame číslo*

$$\nu_k = E\big(\xi^k\big) = \int \xi^k \mathrm{d}P$$

ak ten integrále existuje. Nech ξ je integrovateľná náhodná premenná. Potom jej $k-$tym centrálnym momentom nazývame číslo

$$\mu_k = E\Big((\xi - E(\xi))^k\Big) = \int (\xi - E(\xi))^k \,\mathrm{d}P$$

ak ten integrál existuje.

Teraz nám pôjde o výpočet momentov pomocou distribučnej funkci, resp. Pomocou Lebesguovho-Stieltjesovho integrálu. K tomu sformulujeme a dokážeme trochu všobecnejšie tvrdenie.

Definícia 43 *reálna funkcia g definovaná na $(-\infty, \infty)$ sa nazýva borelovská, ak je $\mathscr{B}-$merateľná t.j. vtedy, ak $g^{-1}(E)$ je borelovská množina pre každú borelovskú množinu E*

Veta 59 *Nech ξ je náhodná premenná (s distribučnou funkciou F), g borelovská funkcia. Potom funkcia $g \circ \xi$ (definovaná formulou $g \circ \xi(\omega) = g(\xi(\omega))$) je náhodná premenná a platí:*

$$\int g \circ \xi \mathrm{d}P = \int g(x) \mathrm{d}F(x)$$

ak jeden z uvedených integrálov existuje.

Dôkaz. Prvé tvrdenie vyplýva zo vzťahu $(g \circ \xi)^{-1}(E) = \xi^{-1}\big(g^{-1}(E)\big)$. Definujme teraz mieru μ na systéme všetkých borelovských množín vzťahom $\mu(E) = P\big(\xi^{-1}(E)\big)$. Ľahko vidieť, že μ sa zhoduje s mierou μ_F na $\mathscr{B}$, teda $\mu = \mu_F$. Preto

$$\begin{aligned}\int \chi_E \circ \xi \mathrm{d}P &= \int \chi_E(\xi(\omega)) \mathrm{d}\omega = \\ &= \int \chi_{\xi^{-1}(E)}(\omega)\, \mathrm{d}\omega = P\big(\xi^{-1}(E)\big) = \\ &= \mu(E) = \mu_F(E) = \int \chi_E \mathrm{d}F\end{aligned}$$

teda dokazovaný vzťah platí pre funkcie tvaru $g = \chi_E$, kde E je borelovská množina. Ľahko vidieť, že platí aj pre jednoduché (t.j. jednoducho integrovateľné) borelovské funkcie g.
Nech g je nezáporná borelovská funkcia. Potom podľa vety 20 existuje neklesajúca postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoduchých, borelovských funkcií taká, že $g_n \nearrow g$. Funkcie $g_n \circ \xi$ sú jednoduché náhodné premenné, $g_n \circ \xi \nearrow g \circ \xi$. Podľa definície, vety 30 a vety 27 platí:

$$\int g \mathrm{d}F = \lim \int g_n \mathrm{d}F = \lim \int g_n \circ \xi \mathrm{d}P = \int g \circ \xi \mathrm{d}P$$

ak vopred vieme, že jeden z integrálov $\int g\mathrm{d}F$, $\int g \circ \xi \mathrm{d}P$ existuje. Prípad ľubovoľnej funkcie g možno spraviť obvyklým spôsobom. □

Veta 60 *Ak je ξ integrovateľná a F je jej distribučná funkcia, tak*

$$E(\xi) = \int x \mathrm{d}F(x)$$

Dôkaz. funkcia g definovaná vzťahom $g(x) = x$ je borelovská, preto podľa vety 59 platí:

$$E(\xi) = \int \xi \mathrm{d}P = \int g(\xi)\mathrm{d}P = \int g(x)\mathrm{d}F(x) = \int x\mathrm{d}F(x)$$ □

Platí, pravda, oveľa viac:

Veta 61 *Ak ξ má $k-$ty počiatočný moment (resp. centrálny) moment ν_k (resp.μ_k) a F je jej distribučná funkcia, tak*

$$\nu_k = \int x^k \mathrm{d}F(x)$$

resp.

$$\mu_k = \int (x - E(\xi))^k \,\mathrm{d}F(x)$$

Dôkaz. Použijeme vetu 59. V prvom prípade je $g(x) = x^k$, v druhom $g(x) = (x - E(\xi))^k$ □

Veta 62 *Ak ξ je diskrétna náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty x_i s pravdepodobnosťami p_i, tak*

$$\nu_k = \sum x_i^k p_i \left(\textit{špeciálne } E(\xi) = \sum x_i p_i\right)$$
$$\mu_k = \sum (x_i - E(\xi))^k \, p_i$$

[5]

Dôkaz. Vyplýva z vety 61 a 55 □

Veta 63 *Ak ξ je spojitá náhodná premenná s hustotou f, tak*

$$\nu_k = \int x^k f(x)\mathrm{d}x \left(\textit{špeciálne } E(\xi) = \int x f(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$\mu_k = \int (x - E(\xi))^k f(x)\mathrm{d}x$$

Dôkaz. Vyplýva z vety 61 a 56 □

Pri zavádzaní momentov náhodných premenných sa často vyskytuje jedna nedôslednosť. Momenty sa obvykle definujú vzťahom $\mu_k = E\Big((\xi - E(\xi))^k\Big)$, $E(\xi)$ sa definuje zvlášť v spojitom a zvlášť v diskrétnom prípade. Pritom sa vyjadrenie momentov aké sme uviedli vo vetách 62 a 63 považuje za samozrejmé, hoci by sa malo dokazovať. Osvetlíme si to na príklade

[5]Indexy i môžu prebiehať nejakú spočítateľnú (teda konečnú, ale aj nekonečnú) množinu.

Vezmime hoci μ_2, a to diskrétny prípad. μ_2 je obzvlášť dôležitý; budeme ho nyzývať disperzia alebo rozptyl a označovať znakom $\sigma^2(\xi)$; teda $\sigma^2(\xi) = E\Big((\xi - E(\xi))^2\Big)$. Preskúmajme celkom jednoduchý číselný príklad. Nech ξ nadobúda len dve hodnoty $x_1 = 1, x_2 = -1$, ktoré sú rovnako pravdepodobné, teda $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. Máme:

$$E(\xi) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 0$$

Náhodná premenná $(\xi - E(\xi))^2 = \xi^2$ nadobúda jedinú hodnotu $x_1' = 1$ a to s pravdepodobnosťou $p_1' = 1$. Preto

$$\sigma^2(\xi) = E\Big((\xi - E(\xi))^2\Big) = x_1' p_1' = 1$$

vzťah $\mu_2 = \sum (x_i - E(\xi))^2 p_i$ nám dáva

$$\sigma^2(\xi) = (x_1 - 0)^2 p_1 + (x_2 - 0)^2 p_2 = 1$$

Prirodzene, že nám vyšlo to isté, len sme chceli čitateľa presvedčiť o tom, že vzťah $\sigma^2(\xi) = \sum (x_i - E(\xi))^2 p_i$ si vyžaduje dôkaz. Pravdaže, v diskrétnom prípade celkom jednoduchý.

CVIČENIA

1. Dokážte, že funkcia F je v bode x_0 spojitá vtedy a len vtedy, ak pre každú postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $x_n \nearrow x_0$ platí $F(x_0) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)$.

2. Podobným spôsobom ako v cvičení 1 chcarekterizuje spojoitosť sprava.

3. Dokážte, že nasledujúce množiny sú spočítateľné:
   množina všetkých párnyc prirodzených čísiel.
   množina všetkých celých nezáporných čísiel.
   množina všetkých celých čísiel.

4. Nech $x_i\,(1 = 1, 2, \cdots)$ sú ľubovoľné navzájom rôzne čísla, $p_i\,(i = 1, 2, \cdots)$ nezáporné čísla, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Zostrojte priestor $\Omega, \sigma-$algebru $\mathscr{S}$, prvadepodosbnosť P tak, aby boli x_i hodnoty nejakej náhodnej premennej ξ definovanej na Ω a p_i príslušné pravdepodobnosti.

   Návod 9 $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots\}, \mathscr{S} = 2^{\Omega}, P(\{x_i\}) = p_i, \xi(i) = x_i$

5. Zostrojte náhodnú premennú ξ odpovedajúcu tomuto pokusu: Hádžeme mincou, ξ nadobúda hodnoty $0, 1, 2, \cdots$ a $P(\xi = i)$ je pravdepodobnosť toho, že pri $i-$tom hode prvýkrát padne lev, $P(\xi = 0)$ je zase pravdepodobnosť toho, že lev nikdy nepadne.

6. Dokážte, že nezáporná integrovateľná funkcia f je hustotou nejakej náhodnej premennej ξ vtedy a len vtedy, keď $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

7. Dokážte, že funkcia f definovaná vzťahom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

   ($\sigma > 0, a$ ľubovoľné) je hustota náhodnej premennej (tzv. normálne rozdelenie).

   Návod 10 *Použiť tzv. Laplaceov integrál*

$$\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

8. Dokážte, že postupnostiam $\{x_i = i\}_{i=0}^{\infty}$ a $\left\{p_i = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}\right\}_{i=0}^{\infty}$ Odpovedá náhodná premenná (tzv. Poissonovo rozdelenie).

9. Určte číslo c tak, aby funkcia $f = \chi_{\langle a,b)}$ bola hustotou náhodnej premennej (tzv. rovnomerné rozdelenie.). Zostrojte distribučnú funkciu.

10. Nech F, G sú neklesajúce funkcie spojité zľava, μ_F, μ_G príslušné Lebesguove-Stieltjesove miery, $\tilde{\mu}_F, \tilde{\mu}_G$ ich zúplnenia definované na $\sigma-$algebrách $\mathscr{S}_F, \mathscr{S}_G$. Zostrojte F, G také, aby $\mathscr{S}_F \neq \mathscr{S}_G$.

11. Miery μ, ν sú ekvivalentné, ak sú definované na tej istej $\sigma-$algebre $\mathscr{S}$ a platí: $\mu(E) = 0 \Leftrightarrow \nu(E) = 0$. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby μ_F, μ_G boli ekvivalentné.

12. Vyjadrite (absolútne konvergentný) nekonečný rad ako Lebesguov-Stieltjesov integrál.

Návod 11 *Všimnite si dôkaz vety 55*

13. Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej ξ nadobúdajúcej hodnoty $x_n = n$ s pravdepodobnosťami $p_n = \frac{1}{2^n}$

NEZÁVISLOSŤ

STREDNÁ HODNOTA SÚČINU NEZÁVISLÝCH NÁHODNÝCH PREMENNÝCH

Udalosti E, F sú nezávislé, ak $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$. Náhodné premenné ξ, ζ sú nezávislé, ak sú nezávislé udalosti $\xi^{-1}(E), \zeta^{-1}(F)$ pre ľubovoľné borelovské množiny E, F. Tri náhodné premenné ξ, η, ζ sú nezávislé, ak sú nezávislé udlaosti $\xi^{-1}(E), \eta^{-1}(F), \zeta^{-1}(G)$. Je zaujímavé, že na to, aby tri náhodné premenné boli nazávislé nastačí, aby boli nezávislé ľubovoľné dve z nich. (Pozri cvič. 1.) Tento fakt uvádzame len kvôli úplnosti, pretože v ďalšom texte v celej kapitole vystačíme s nezávislosťou dvoch náhodných premenných.

Definícia 44 *Nech F ľubovoľný systém náhodných premenných definovaných na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathscr{S}, P)$. Systém F nazveme nazávislým, ak pre ľubovoľný konečný podsystém $\{\xi_1, \cdots, \xi_k\}$ systému F a ľubovoľné borelovské množiny $E_1, \cdots, E_k$ platí:*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \xi_i^{-1}(E_i)\right) = \prod_{i=1}^{k} P\big(\xi^{-1}(E_i)\big) = \\ = P\big(\xi_1^{-1}(E_1)\big) \cdots P\big(\xi_k^{-1}(E_k)\big)$$

Veta 64 *Ak ξ, η sú nezávislé, integrovateľné náhodné premenné, tak je $\xi \cdot \eta$ tiež integrovateľná a platí:*

$$E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$$

Dôkaz. Ak $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}, \eta = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{F_j}$ (E_i resp. F_j navzájom disjunktné) sú nezávislé, tak sú nezávislé aj ľubovoľné dve udalosti E_i, F_j, lebo $E_i = \xi^{-1}(\{\alpha_i\}), F_j = \eta^{-1}(\{\beta_j\})$. Okrem toho $\xi \cdot \eta = \sum\limits_i \sum\limits_j \alpha_i \beta_j \chi_{E_i} \chi_{F_j} = \sum\limits_i \sum\limits_j \alpha_i \beta_j \chi_{E_i \cap F_j}$ Preto

$$\begin{aligned} E(\xi\eta) &= \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j P(E_i \cap F_j) = \\ &= \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j P(E_i) P(F_j) = \\ &= \left(\sum_i \alpha_i P(E_i)\right) \left(\sum_j \beta_j P(F_j)\right) = E(\xi) E(\eta) \end{aligned}$$

Nech $\xi, \eta \geq$ sú nezávislé a integrovateľné. Potom existuje postupnosť $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoduchých funkcií taká, že $0 \leq \xi_n \nearrow \xi$ a $\xi_n = \sum\limits_i \alpha_i \chi_{E_i}$, kde $E_i = \xi^{-1} E_i^*, E_i^*$ sú borelovské. To vyplýva z vety 20. Podobnú postupnosť

$\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ môžeme zostrojiť pre η. Ukážeme, že ξ_n, η_n sú nezávislé.

$$\begin{aligned}
P\big(\xi_n^{-1}(E)\big)P\big(\eta_n^{-1}(F)\big) &= P\left(\bigcup_{\alpha_i\in E} E_i\right)P\left(\bigcup_{\beta_j\in F} F_j\right) = \\
&= \sum_{\alpha_i\in E}\sum_{\beta_j\in F} P(E_i)P(F_j) = \\
&= \sum_{\alpha_i\in E}\sum_{\beta_j\in F} P\big(\xi^{-1}(E_i^*)\big)P\big(\eta^{-1}\big(F_j^*\big)\big) = \\
&= \sum_{\alpha_i\in E}\sum_{\beta_j\in F} P\big(\xi^{-1}(E_i^*)\cap\eta^{-1}\big(F_j^*\big)\big) = \\
&= \sum_{\alpha_i\in E}\sum_{\beta_j\in F} P(E_i\cap F_j) = \sum_{\alpha_i\in E} P\left(E_i\cap\bigcup_{\beta_j\in F} F_j\right) = \\
&= P\left(\bigcup_{\alpha_i\in E} E_i\cap\bigcup_{\beta_j\in F} F_j\right) = P\big(\xi_n^{-1}(E)\cap\eta_n^{-1}(F)\big)
\end{aligned}$$

Skutočne sú teda ξ_n, η_n nezávislé. Preto

$$\begin{aligned}
\lim E(\xi_n\eta_n) &= \lim E(\xi_n)E(\eta_n) = \\
&= \lim E(\xi_n)\lim E(\eta_n) = E(\xi)E(\eta)
\end{aligned}$$

Pretože $\{\xi_n\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť integrovateľných funkcií a postupnosť $\big\{E(\xi_n\eta_n) = \int \xi_n\eta_n \mathrm{d}P\big\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a $\xi_n\eta_n \nearrow \xi\eta$, funkcia $\xi\eta$ je integrovateľná a platí: $E(\xi\cdot\eta) = \lim E(\xi_n\eta_n) = E(\xi)E(\eta)$.
Zostáva nám rozobrať prípad ľubovoľných nezávislých integrovateľných funkcií ξ, η. Pre ľubovoľnú borelovskú množinu E platí:

$$\big\{\omega : \xi^+(\omega)\in E\big\} = \begin{cases} \xi^{-1}(E\cap(0,\infty)), \text{ ak } 0\notin E \\ \xi^{-1}((E\cap\langle 0,\infty))\cup(-\infty,0\rangle), \text{ ak } 0\in E \end{cases}$$

$$\big\{\omega : \xi^-(\omega)\in E\big\} = \begin{cases} \xi^{-1}(-E\cap(-\infty,0)), \text{ ak } 0\notin E \\ \xi^{-1}((-E\cap(-\infty,0))\cup\langle 0,\infty)), \text{ ak } 0\in E \end{cases}$$

(Pritom $-E = \{x : -x\in E\}$.)
V každom prípade teda
$\{\omega : \xi^+(\omega)\in E\} = \{\omega : \xi^-(\omega)\in E^*\}, \{\omega : \xi^-(\omega)\in E\} = \{\omega : \xi^-(\omega)\in E_*\}$,
pričom E^*, E_* sú borelovské, ak len E bola borelovská. Odtiaľ vyplýva, že náhodné premenné ξ^+, η^+ resp. ξ^+, η^- resp. ξ^-, η^+ resp. ξ^-, η^- sú nezávislé dokážeme to napr. o ξ^-, η^+

$$\begin{aligned}
&P\big(\big\{\omega : \xi^-(\omega)\in E\big\}\cap\big\{\omega : \eta^+(\omega)\in F\big\}\big) = \\
&= P(\{\omega : \xi(\omega)\in E_*\}\cap\{\omega : \eta(\omega)\in F^*\}) = \\
&= P\big(\xi^{-1}(E_*)\cap\eta^{-1}(F^*)\big) = \\
&= P\big(\xi^{-1}(E_*)\big)P\big(\eta^{-1}(F^*)\big) = \\
&= P\big(\big\{\omega : \xi^-(\omega)\in E\big\}\big)P\big(\big\{\omega : \eta^+(\omega)\in F\big\}\big)
\end{aligned}$$

Pretože $\xi^+, \xi^-, \eta^+, \eta^-$ sú integrovateľné, podľa predchádzajúceho sú integrovateľné aj náhodné premenné $\xi^+\cdot\eta^+, \xi^+\cdot\eta^-, \xi^-\cdot\eta^+, \xi^-\cdot\eta^-$, teda aj náhodná premenná
$\xi\cdot\eta = (\xi^+ - \xi^-)\cdot(\eta^+ - \eta^-) = \xi^+\cdot\eta^+ - \xi^-\cdot\eta^+ - \xi^+\cdot\eta^- + \xi^-\cdot\eta^-$ a platí:

$$\begin{aligned}
E(\xi\cdot\eta) &= E\big(\xi^+\cdot\eta^+\big) - E\big(\xi^-\cdot\eta^+\big) - E\big(\xi^+\cdot\eta^-\big) + E\big(\xi^-\cdot\eta^-\big) = \\
&= E\big(\xi^+\big)\cdot E\big(\eta^+\big) - E\big(\xi^-\big)\cdot E\big(\eta^+\big) - E\big(\xi^+\big)\cdot E\big(\eta^-\big) + E\big(\xi^-\big)\cdot E\big(\eta^-\big) = \\
&= \big(E\big(\xi^+\big) - E\big(\xi^-\big)\big)\cdot\big(E\big(\eta^+\big) - E\big(\eta^-\big)\big) = \\
&= E(\xi)E(\eta)
\end{aligned}$$

Tým je veta dokázaná. □

Je zaujímavé, že opak vety 64 neplatí. Totiž ak aj $E(\xi\cdot\eta) = E(\xi)\cdot E(\eta)$, nemusia byť ešte ξ, η nezávislé (pozri cvič. 8).

Definícia 45 *Ak platí pre nejaké integrovateľné náhodné premenné* ξ, η *rovnosť* $E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$*, hovoríme, že* ξ, η *sú nekorelované.*

Veta 64 teda hovorí, že ľubovoľné dve nezávislé integrovateľné náhodné premenné sú nekorelované.

ZÁKON VEĽKÝCH ČÍSIEL

Zákon veľkých čísiel v tej forme v akej ho uvedieme, je v podstate dôsledkom vety 64
Majme nejakú udalosť E, ktorej pravdepodobnosť je p. Urobme n nezávislých pokusov a nech k je počet pokusov, v ktorých udalosť E nastala. Zákon veľkých čísiel hovorí, že pre dosť veľké n sa $\frac{k}{n}$ nelíši veľmi od p. Teda pravdepodobnosť, že $\frac{k}{n}$ sa bude líšiť od p o viac ako o nejakú pevnú hodnotu ε, je pre dosť veľké n veľmi malá. Podrobnejšie: Pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Toto je zdanlivo presná formulácia spôsobená pravdepodobne tým $\varepsilon > 0$. Predovšetkým nie je jasné, čo je to k. Pretože k je konštanta, bolo by ho treba aspoň zaradiť do nejakej kategórie. Všimnime si, že máme do činenia s opakujúcimi sa pokusmi a už v I. kapitole sme poukázali na pojmové ťažkosti s tým spojené. Nebudeme však čitateľa ďalej zdržovať, ale ukážeme ako možno celú vec vyriešiť.
Predpokladajme, že máme danú postupnosť $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ udalostí, $P(E_n) = p\,(n = 1, 2, \cdots)$, z ktorých každé dve sú nezávislé. Položme $\xi_i = \chi_{E_i}\,(i = 1, 2, \cdots)$. Teda ξ_i môžu nadobudnúť len dve hodnoty nulu a jednotku.

$$P(\xi_i = 1) = P(E_i) = p$$
$$P(\xi_i = 0) = P(\Omega - E_i) = 1 - p$$

Zostrojme teraz náhodnú premennú S_n pomocou vzťahu

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}$$

Náhodná premenná môžťe nadobudnúť celkom $n+1$ hodnôt: $0, 1, \cdots, n$. Ak $S_n = k$, to znamená, že pre k indexov i je $x \in E_i$ a pre zostávajúcich $n-k$ indexov je $x \notin E_i$. To ale vystihuje naše intuitívne k, ak si predstavíme realizáciu E pri $i-$tom pokuse. Teda k je náhodná premenná. Máme teda

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{x : \left|\frac{S_n(x) - np}{n}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

Pričom $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{E_i}, E_i$ sú nezávislé a $P(E_i) = p$
Aby sme mohli tento vzťah zovšeobecniť (a samozrejme aj dokázať, čo sme doteraz neurobili), musíme si ešte vyjasniť význam čísla np. Máme:

$$E(\xi_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p,$$
$$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Zákon veľkých čísiel (veta 67) budeme formulovať takto:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega : \left|\frac{S_n(\omega) - E(S_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

kde $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ a ξ_i spĺňajú, prirodzene isté predpoklady.
Dôkaz zákona veľkých čísiel je obsiahnutý v sérii nasledujúcich jednoduchých tvrdení.

Veta 65 *(Čebyševova nerovnosť.) Ak ξ je náhodná premenná s disperziou (t.j. druhým centrálnym momentom) $\sigma^2(\xi) = \sigma^2$, tak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí:*

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) = P(\{\omega : |\xi(\omega) - E(\xi)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Dôkaz. Platí:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = \sigma^2(\xi) = E\Big((\xi - E(\xi))^2\Big) &= \int (\xi - E(\xi))^2 \, \mathrm{d}P = \\
= \int\limits_A (\xi - E(\xi))^2 \, \mathrm{d}P &+ \int\limits_{\Omega - A} (\xi - E(\xi))^2 \, \mathrm{d}P \geq \\
\geq \int\limits_A (\xi - E(\xi))^2 \, \mathrm{d}P&,
\end{aligned}$$

kde A by mohla byť vlastne ľubovoľná udalosť, ale pre naše účely je vhodné položiť $A = \{\omega : |\xi(\omega) - E(\xi)| \geq \varepsilon\}$. Preto:

$$\sigma^2 \geq \int\limits_A (\xi - E(\xi))^2 \, \mathrm{d}P \geq \int\limits_A \varepsilon^2 \mathrm{d}P = \varepsilon P(A)$$

teda

$$P(\{\omega : |\xi(\omega) - E(\xi)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

□

Lema 29 *Ak ξ má disperziu, tak*

$$\sigma^2(\xi) = E\big(\xi^2\big) - (E(\xi))^2$$

Dôkaz. O správnosti tvrdenia sa presvedčíme priamym výpočtom:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\xi) &= E\Big((\xi - E(\xi))^2\Big) = E\big(\xi^2\big) - 2E(\xi E(\xi)) + E\Big((E(\xi))^2\Big) = \\
&= E\big(\xi^2\big) - 2E(\xi)E(\xi) + (E(\xi))^2 \, E(1) \\
&= E\big(\xi^2\big) - (E(\xi))^2
\end{aligned}$$

□

Veta 66 *(Rovnosť Bianeymeho). Nech $\xi_1, \cdots, \xi_n$ sú náhodné premenné, ktoré majú disperzie $\sigma^2(\xi_i)$ a ktoré sú navzájom nekorelované (t.j. $E(\xi_i \xi_j) = E(\xi_i)E(\xi_j)$ pre $i \neq j$). Potom*

$$\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(\xi_i)$$

Dôkaz. Stačí dokázať pre dve premenné ξ, η a potom pokračovať indukciou. Nech teda $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$ a nech existujú $\sigma^2(\xi) = E\Big((\xi - E(\xi))^2\Big), \sigma^2(\eta) = E\Big((\eta - E(\eta))^2\Big)$. Potom

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) &= E\big(\xi^2\big) - (E(\xi))^2 + E\big(\eta^2\big) - (E(\eta))^2 = \\
&= E\big(\xi^2\big) + 2E(\xi\eta) + E\big(\eta^2\big) - (E(\xi))^2 - 2E(\xi)E(\eta) - (E(\eta))^2 = \\
&= E\Big((\xi + \eta)^2\Big) - (E(\xi) - E(\eta))^2 = \\
&= E\Big((\xi + \eta)^2\Big) - (E(\xi + \eta))^2 = \sigma^2(\xi + \eta)
\end{aligned}$$

□

Veta 67 *(Zákon veľkých čísiel.) Nech $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť navzájom nekorelovaných (špeciálne napr. nezávislých) náhodných premenných, ktoré majú disperzie $\sigma^2(\xi_n)$ a pre ktoré platí:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(\xi_i) = 0$$

Potom pre ľubovoľné kladné číslo ε platí:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega : \left|\frac{S_n(\omega) - E(S_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

kde $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$

Dôkaz. Podľa Čebyševovej nerovnosti (veta 65) platí:

$$0 \leq P\left(\left\{\omega : \left|\frac{S_n(\omega) - E(S_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) =$$
$$= P(\{\omega : |S_n(\omega) - E(S_n)| \geq n\varepsilon\}) \leq \frac{\sigma^2(S_n)}{n^2\varepsilon^2}$$

Posledný výraz sa podľa vety 66 rovná $\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(\xi_i)$. Preto

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega : \left|\frac{S_n(\omega) - E(S_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0 \qquad \square$$

Všimnime si ešte, že ak položíme $\xi_i = \chi_{E_i}$, kde E_i sú nezávislé udalosti a $P(E_i) = p$, tak ξ_i sú nezávislé integrovateľné náhodné premenné s disperziami

$$\sigma^2(\xi_i) = E\big(\xi_i^2\big) - (E(\xi_i))^2 = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) - p^2 =$$
$$= p\,(1-p)$$

Preto

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2(\xi_i) = \frac{1}{n^2}np\,(1-p) = \frac{1}{n}p\,(1-p)$$

V tomto prípade sú splnené predpoklady vety 67, teda skutočne

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{x : \left|\frac{S_n(x)}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

CVIČENIA

1. Dokážte, že ξ, η, ζ nie sú nezávislé, hoci každé dve spomedzi nich sú nezávislé. Pritom ξ, η, ζ sú definované takto:
   $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}, P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}, \xi(\omega_0) = \xi(\omega_1) = 1, \xi(\omega_2) = \xi(\omega_3) = 0, \eta(\omega_0) = \eta(\omega_2) = 1, \eta(\omega_1) = \eta(\omega_3) = 0, \zeta(\omega_0) = \zeta(\omega_3) = 1, \zeta(\omega_1) = \zeta(\omega_2) = 0$

2. Dokážte, že ak ξ, η sú nezávislé, tak sú nezávislé aj $|\xi|, |\eta|$.

3. Dokážte, že ak ξ, η sú nezávislé náhodné premenné, g, h borelovské funkcie, tak $g \circ \xi, h \circ \xi$ sú tiež nezávislé.

4. Množina $U \subset R_1 = (-\infty, \infty)$ sa nazýva otvorená, ak je zjednotením ľubovoľného spočítateľného systému otvorených intervalov. Dokážte, že reálna funkcia $f : R_1 \to R_1$ je spojitá na R_1 vtedy a len vtedy, ak vzor ľubovoľnej otvorenej množiny je otvorená množina.

5. Dokážte, že f je spojitá vtedy a len vtedy, keď vzor otvoreného intervalu je otvorená množina.

6. Systém všetkých borelovských množín je najmenší $\sigma-$okruh nad systémom otvorených množín.

7. Na základe cvič. 5 a 6 dokážte, že každá funkcia spojitá na R_1 je borelovská.

8. Dokážte, že uvedené náhodné premenné ξ, η sú nekorelované, hoci sú závislé. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{3}; \xi(\omega_1) = -1, \xi(\omega_2) = -2, \xi(\omega_3) = 3, \eta(\omega_1) = 1, \eta(\omega_2) = 4, \eta(\omega_3) = 3.$

SÚČIN MIER

DVOJNÉ INTEGRÁLY

Napriek tomu, že sme vybudovali teóriu integrálu vo veľmi všeobecnom zmysle, radi by sme aspoň upozornili na na niektoré zvláštnosti integrálov v $n-$rozmernom euklidovskom priestore (obmedzíme sa na euklidovskú rovinu R_2). Problematiku, ktorú tu len načrtneme rozoberieme dôkladnejšie v ďalších častiach. V tomto paragrafe chceme skôr ukázať, elementárny prístup k dvojným integrálom. Súčasne čitateľ, ktorý dvojné integály nepozná, zoznámi sa s jednoduchým, ale dôležitým príkladom.
Bude vhodné zaviesť niektoré označenia. Nech $X, Y \subset R_1$. Znakom $X \times Y$ označujeme množinu všetkých bodov $(x, y) \in R_2$, pre ktoré je $x \in X$ a $y \in Y$. $X \times Y$ sa nazýva interval, ak sú X, Y intervaly. $X \times Y$ je uzavretý interval vtedy, ak aj X, aj Y sú uzavreté intervaly.
Dvojný integrál z nezápornej funkcie dvoch premenných f cez množinu A má tento názorný význam: Je to objem telesa, ktoré je zhora ohraničené grafom funkcie f a ktorého "základňa"je množina A. Presnejšie: ide o objem telesa $\{(x, y, z) : (x, y) \in A, 0 \le z \le f(x, y)\}$
Nebudeme sa podrobne zaoberať definíciou dvojného (Lebesguovho) integrálu. Poznamenáme len, že máme dve možnosti. Prvá možnosť spočíva v tom , že definujeme dvojný integrál ako integrál podľa Lebesguovej miery: $\mu(\langle a, b) \times \langle c, d)) = (b - a)(d - c)$. Pravda, treba dokázať, že μ je $\sigma-$aditívna (cvič. 23 Kap 2) a treba ju prirodzeným spôsobom rozšíriť na najmenší okruh nad systémom všetkých intervalov typu $\langle a, b) \times \langle c, d)$. Túto myšlienku budeme realizovať v paragrafoch 2 a 3 v oveľa všeobecnejšej forme. Pri dôkazoch však budeme používať metódy, ktoré by sa mohli zdať veľmi umelé, keby sme ich najprv ničím nemotivovali, napr. v euklidovskej rovine. Preto použijeme iný, elementárnejší spôsob.
Obmedzíme sa na pevný uzavretý interval $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Funkciu f definovanú na I nazveme jednoduchou, ak sa I dá písať ako zjednotenie konečného počtu disjunktných intervalov $E_1, \cdots, E_k$, na každom z ktorých je funkcia f konštantná. Integrál definujeme prirodzeným spôsobom:

$$\iint_I f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(E_i)$$

pričom E_i sú tie intervaly, na ktorých je f konštantná, α_i sú príslušné konštanty a $\mu(E_i)$ je miera (obsah) intervalu E_i. Už vieme, že na to, aby sme mohli vybudovať uspokojivú teóriu, musíme dokázať lemu analogickú leme 6 (resp. vete 42). to možno urobiť podobne ako v jednorozmernom prípade (cvič. 16 kap.4). Opäť vidno, že tento prístup je natoľko elementárny, že sa hodí aj pre prvú informáciu o dovjných integráloch. (Podrobnosti tu nebudeme rozvádzať.)
Už vyššie sme uviedli označenie, ktoré sa používa nielen v prípade jednoduchých funkcií

$$\iint_I f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Nasledujúca veta ukazuje, akým spôsobom možno dvojný integrál prakticky vypočítať.

Veta 68 *Nech f je funkcia integrovateľná na intervale $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Potom*

$$\iint_I f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

Dôkaz. Nech $f = \chi_E$, kde $E \subset I, E = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle c_1, d_1 \rangle$ (pričom skutočnosť, že E je uzavretý interval nie je podstatná). Potom

$$\iint_I \chi_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1\mu(E) = (b_1 - a_1)\,(d_1 - c_1)$$

Na druhej strane

$$\int_c^d \chi_E(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} d_1 - c_1, \text{ ak } x \in \langle a_1, b_1 \rangle \\ 0, \text{ ak } x \notin \langle a_1, b_1 \rangle \end{cases}$$

Preto

$$\int_c^d \chi_E(x,y)\mathrm{d}y = (d_1 - c_1)\,\chi_{\langle a_1, b_i \rangle}$$

Teda

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = (d_1 - c_1)\,(b_1 - a_1)$$

V dôkaze tejto vety by ďalej bolo treba pokračovať obvyklými limitnými prechodmi, ktoré predsa len nebudeme robiť, pretože dôkaz by sa ďalej takmer doslovne zhodoval s dôkazom tzv. Fubiniho vety z 3. časti. □

V "praxi"treba integrovať aj cez iné množiny ako je interval, napr. cez trojuholník, kruh a pod.

Definícia 46 *Množina $A = \{(x,y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$ sa nazýva elementárna oblasť, ak g, h sú spojité na $\langle a, b \rangle, g \le h$. Položme $I = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, kde $c = \min g, d = \max h$*
Funkciu f nazveme integrovateľnou na A, ak je na I integrovateľná funkcia f^* definovaná takto:

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), \ ak \ (x,y) \in A \\ 0, \ ak \ (x,y) \notin A \end{cases}$$

Integrál definujeme vzťahom

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_I f^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Veta 69 *Nech je funkcia f integrovateľná na elementárnej oblasti $A = \{(x,y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$. Potom*

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

Dôkaz. Platí:

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_I f^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^d f^*(x,y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left[\int_c^{g(x)} f^*(x,y)\mathrm{d}y + \int_{g(x)}^{h(x)} f^*(x,y)\mathrm{d}y + \int_{h(x)}^d f^*(x,y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f^*(x,y)\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

Aj keď veta 69 je dosť známa, nezaškodí ak uvedieme jej aplikáciu v nasledujúcom príklade. V ďalšom texte budeme totiž potrebovať metódu, ktorá vznikla na základe tejto vety. □

Príklad 5 *Vypočítajte* $\iint\limits_A (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$*, ak* A *je obrazec ohraničený krivkami* $y = x^2$ *a* $y = x+2$
V tomto prípade $a=-1, b=2, g(x)=x^2, h(x)=x+2$*. Preto*

$$\iint\limits_A (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{2}\left[\int\limits_{x^2}^{x+2}(x+y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{x+2}\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_{-1}^{2}\left(x^2+2x+\frac{x^2+4x+4}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{189}{20}$$

Nie je bez zaujímavosti, že pomocou dvojných integrálov možno vypočítať aj obsah rovinných útvarov. Integrál

$$\iint\limits_A 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

je totiž objem telesa, ktorého "základňa"je množina A a ktoré je zhora ohraničené rovinou $z=1$. Objem tohto telesa sa rovná súčinu obsahu základne a výšky, ktorá sa rovná 1. Preto $\iint\limits_A 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je obsah množiny A

Príklad 6 *Vypočítajte obsah obrazca ohraničeného krivkami* $y=x^2$ *a* $y=x+2$*. Máme:*

$$P(A) = \iint\limits_A 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{2}\left[\int\limits_{x^2}^{x+2}1\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$$

Práve uvedený fakt, t.j. rovnosť

$$P(A) = \iint\limits_a^b\left[\int\limits_{g(x)}^{h(x)}1\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$$

nám poslúži k definícii miery v kartézskom súčine (v kartézskom súčine $R_1 \times R_1$ značí obsah).
Aby však naše úvahy boli celkom v poriadku, treba vedieť, že funkcie, ktoré v našich výpočtoch vystupujú, sú integrovateľné, teda napr., že je integrovateľná ľubovoľná funkcia spojitá na elementárnej oblasti.

Veta 70 *Každá funkcia spojitá na elementárnej oblasti* A *je integrovateľná na* A*.*

Dôkaz. * Nech je najprv $f \le 0$. Rozdeľme interval $\langle a,b\rangle$ a tiež interval $\langle c,d\rangle$ na 2^n "rovnakých"častí $E_i = \langle x_i, x_{i+1})$, resp.
$F_i = \langle y_i, y_{i+1})\,(i=0,1,\cdots,2^n-1)$ a ešte $E_{2^n}=\{b\}, F_{2^n}=\{d\}$, takže $\bigcup E_i = \langle a,b\rangle, \bigcup F_i = \langle c,d\rangle$.
Pre $(x,y)\in E_i\times F_j$ položme:

$$g_n(x,y) = \sup\{-f^*(x,y) : (x,y)\in E_i\times F_j\}$$

Funkcie g_n sú jednoduché, postupnosť $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca. Dokážeme, že

$$-f^* = \lim g_n$$

čím bude dôkaz ukončený. Nech ε je ľubovoľné kladné číslo.
Uvážme, že A je uzavretá množina, t.j. k ľubovoľnému bodu $(x,y)\notin A$ existuje také okolie $(x-\delta,x+\delta)\times(y-\eta,y+\eta)$ bodu (x,y), ktoré je disjunktné s množinou A.
Toto tvrdenie je zrejmé, ak $x<a$ alebo $x>b$. Nech (x,y) leží "nad"množinou A, t.j. $x\in\langle a,b\rangle, y>h(x)$ (podobne sa rozoberie prípad $y<g(x)$). Pretože h

je rovnomerne spojitá na $\langle a, b\rangle$, existuje ku kladnému číslu $\eta = \frac{y-h(x)}{2}$ také $\delta > 0$, že $|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |h(t_1) - h(t_2)| < \eta$. Nech $(u, v) \in (x - \delta, x + \delta) \times (y - \eta, y + \eta)$. Potom $|u - x| < \delta$, teda $|h(u) - h(x)| < \eta$, čiže

$$h(u) < h(x) + \eta = \frac{y + h(x)}{2} = y - \eta < v$$

Preto $(u, v) \notin A$.
1. Nech $(x, y) \notin A$. Podľa predchádzajúceho existujú také $\delta > 0, \eta > 0$, že $(x - \delta, x + \delta) \times (y - \eta, x + \eta) \cap A = \emptyset$. Zvoľme také N, aby $\frac{b-a}{2^N} < \delta$, $\frac{d-c}{2^N} < \eta$. Potom existujú E_i, F_j z $N-$tého delenia tak, že $(x, y) \in E_i \times F_j, (E_i \times F_j) \cap A = \emptyset$. Potom ale pre $n \geq N$ máme $g_n(x, y) = 0$, teda $\lim g_n(x, y) = -f^*(x, y)$.
2. Nech $(x, y) \in A$. f je rovnomerne spojitá na A. Existuje teda také $\delta > 0$, že platí implikácia $\varrho((x, y), (u, v)) < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(u, v)| < \varepsilon$.
Zvoľme N tak, aby uhlopriečky všetkých intervalov $N-$tého delenia boli menšie než δ. Nech $n \geq N, (x, y) \in E_i \times F_j$ (tentokrát pri $n-$tom delení), a okrem toho $(x, y) \in A$.
Ak $g_n(x, y) = 0$, tak na jednej strane $\lim g_n(x, y) = 0$. na druhej strane $-f^*(x, y) \leq 0 = \sup -f$ a súčasne $-f^*(x, y) \geq 0$, lebo $f(x, y) \leq 0$. Preto $-f^*(x, y) = 0$ a platí $-f^*(x, y) = \lim g_n(x, y)$.
Nech $g_n(x, y) > 0$. Potom $g_n(x, y) = \sup\{-f^*(u, v) : (u, v) \in A \cap (E_i \cap F_j)\}$. Pretože $f = f^*$ na A a f je spojitá na uzavretej a ohraničenej množine $A \cap \left(\overline{E_i} \times \overline{F_j}\right)$ $\left(\overline{E_i} = \langle x_i, x_{i+1}\rangle, \overline{F_j} = \langle y_j, y_{j+1}\rangle\right)$ existuje také $(x_0, y_0) \in A \cap \left(\overline{E_i} \times \overline{F_j}\right)$, že $g_n(x_0, y_0) = -f(x_0, y_0)$. Pretože $n \geq N$, je $\varrho((x, y), (x_0, y_0)) < \delta$, teda platí:

$$|g_n(x, y) - (-f^*(x, y))| = |-f(x_0, y_o) + f(x, y)| < \varepsilon$$

Teda aj vtedy $-f^*(x, y) = \lim g_n(x, y)$.
Nakoniec poznamenajme, že každá spojitá funkcia sa dá napísať ako rozdiel dvoch spojitých nekladných funkcií. □

Vetu 70 možno dokázať aj jednoduchšie, pravda, menej elementárnym spôsobom.
Každá elementárna oblasť A je uzavretá a teda borelovská mnoižina. (borelovské množiny v rovine sa definujú podobne ako na priamke. Bude to uvedené v ďalšej časti.) Preto sú konštantné funkcie integrovateľné na A. Ďalej keždá funkcia f spojitá na A, je borelovská funkcia, pretože $\{(x, y) \in A : f(x, y) \leq c\}$ je uzavretá množina. Okrem toho f je ohraničená, teda podľa vety 32 integrovateľná.

SÚČIN MIER

Budeme predpokladať, že sú dané priestory miery $(X, \mathscr{S}, \mu)$ a $(Y, \mathscr{T}, \nu)$, pričom $\mathscr{S}, \mathscr{T}$ sú $\sigma-$algebry. Vo väčšine viet budeme tiež predpokladať, že μ, ν sú konečné. (Uvedené predpoklady sa dajú inak zoslabiť; stačí predpokladať, že $\mathscr{S}, \mathscr{T}$ sú $\sigma-$okruhy a $\mu, \nu \sigma-$konečné miery.)
Pôjde nám o zostrojenie miery λ na vhodnej $\sigma-$algebre podmnožín množiny $X \times Y$, a to takej, že $\lambda(E \times F) = \mu(E)\nu(F)$. Teda, pôjde nám o mieru v rovine, ak máme mieru na priamke.

Definícia 47 *Znakom $\mathscr{M}$ budeme označovať systém všetkých množín tvaru $E \times F$, kde $E \in \mathscr{S}, F \in \mathscr{T}$. Znakom $\mathscr{R}$ budeme označovať systém všetkých množín tvaru $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, kde n je prirodzené číslo, $E_i \in \mathscr{M}$ $(i = 1, \cdots, n)$ a $E_i \cap E_j = \emptyset\, (i \neq j)$.*

Veta 71 *$\mathscr{R}$ je algebra podmnožín množiny $X \times Y$.*

Dôkaz. Vzhľadom na to, že $X \times Y \in \mathscr{M} \subset \mathscr{R}$, stačí dokázať, že $\mathscr{R}$ je okruh. To dokážeme pomocou niekoľkých tvrdení, z ktorých niekoré sú zrejmé.

1. Ak $A, B \in \mathscr{R}, A \cap B = \emptyset$, tak $A \cup B \in \mathscr{R}$.

2. Ak $A, B \in \mathscr{M}$, tak $A \cap B \in \mathscr{M}$.
   Skutočne, nech $A = E_1 \times F_1, B = E_2 \times F_2, E_1, E_2 \in \mathscr{S}, F_1, F_2 \in \mathscr{T}$.
   Potom $A \cap B = (E_1 \cap E_2) \times (F_1 \cap F_2) \in \mathscr{M}$

3. Ak $A, B \in \mathscr{R}$, tak $A \cap B \in \mathscr{R}$
   Nech $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i, B = \bigcup\limits_{j=1}^{m} F_j, E_i \in \mathscr{M}, F_j \in \mathscr{M}$, pričom množiny E_i resp. F_j sú navzájom disjunktné. Potom podľa 1. a 2. tvrdenia platí:
   $$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (E_i \cap F_j) \in \mathscr{R}$$

4. Ak $A, B \in \mathscr{M}$, tak $A - B \in \mathscr{R}$
   Nech $A = E_1 \times F_1, B = E_2 \times F_2, E_1, E_2 \in \mathscr{S}, F_1, F_2 \in \mathscr{T}$. Potom
   $$A - B = ((E_1 \cap E_2) \times (F_1 - F_2)) \cup ((E_1 - E_2) \times F_1) \in \mathscr{R}$$

5. Ak, $A, B \in \mathscr{R}$, tak $A - B \in \mathscr{R}$
   Nech $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i, B = \bigcup\limits_{j=1}^{m} F_j, E_i \in \mathscr{M}, F_j \in \mathscr{M}$ a množiny v tých zjednoteniach sú disjunktné. Potom
   $$A - B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} (E_i - F_j) \in \mathscr{R}$$
   lebo podľa 4 je $E_i - F_j \in \mathscr{R}$, podľa 3 je $G_i = \bigcap\limits_{j=1}^{m} (E_i - F_j) \in \mathscr{R}$ a podľa 1 ($G_i \subset E_i$ sú navzájom disjunktné) je $A - B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_1 \in \mathscr{R}$.

6. $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{R}$
   Posledné tvrdenie vyplýva z rovnosti $A \cup B = (A - B) \cup B$ a z tvrdení 1 a 5. $\square$

Definícia 48 *Nech $A \subset X \times Y, x \in X$. Znakom A^x budeme rozumieť množinu všetkých $y \in Y$, pre ktoré je $(x, y) \in A$.*

Na toto miesto sa hodí heuristická úvaha o tom, ako sa plošný obsah "rozumnej"podmnožiny množiny $X \times Y$ dá vypočítať pomocou dvojného resp. dvojnásobného integrálu. Podľa toho, čo sme zistili v 1. časti, by malo platiť:

$$P(A) = \iint\limits_A 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int \left(\int\limits_{A^x} 1\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int \nu(A^x)\mathrm{d}\mu(x)$$

kde tak ν, ako aj μ značí Lebesguovu mieru. Posledný vzťah nám poslúži na definovanie miery v kartézskom súčine $X \times Y$. Najprv si však musíme vymedziť $\sigma-$algebru "rozumných"množín A, potom musíme dokázať, že $\nu(A^x)$ má zmysel, t.j., že $A^x \in \mathscr{T}$ a napokon, že funkcia $f : X \to R_1$ deifnovaná vzťahom $f(x) = \nu(A^x)$ je $\mu-$integrovateľná.

Definícia 49 *Znakom $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ budeme označovať najmenší $\sigma-$okruh $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ nad okruhom $\mathscr{R}$.*

Veta 72 *Nech $A \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}, x \in X$. Potom $A^x \in \mathscr{T}$.*

Dôkaz. Položme $\mathscr{K} = \{A \in \mathscr{S} \times \mathscr{T} : A^x \in \mathscr{T}\}$.
Predovšetkým uvážme, že $\mathscr{K} \supset \mathscr{M}$. Nech $A = E \times F \in \mathscr{M}$, t.j. $E \in \mathscr{S}, F \in \mathscr{T}$. Potom $A^x = F$ v prípade, že $x \in E$ resp. $A^x = \emptyset$ v prípade, že $x \notin E$. V každom prípade je teda $A^x \in \mathscr{T}$. $\square$

Veta 73 *Nech $A \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$. Na množine X definujme funkciu f_A vzťahom $f_A(x) = \nu(A^x)$. Potom, ak ν je konečná miera, f_A je merateľná (vzhľadom na $\mathscr{S}$). Ak je aj μ konečná, je f_A integrovateľná.*

Dôkaz. Položme:

$$\mathscr{K} = \{A \in \mathscr{S} \times \mathscr{T} : f_A \text{ je merateľná}\}.$$

1. $\mathscr{K} \supset \mathscr{R}$.
   Ak $E \in \mathscr{S}, F \in \mathscr{T}, A = E \times F$, tak $f_A = \nu(F)\chi_E$. Ak teda $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (E_i \times F_i)$, kde $E_i \in \mathscr{S}, F_i \in \mathscr{T}$ $(i = 1, \cdots, n)$ a množiny v zjednoteniá sú navzájom disjunktné, máme:

   $$f_A(x) = \nu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E_i \times F_i)\right)^x\right) = \sum_{i=1}^{n} \nu((E_i \times F_i)^x) =$$
   $$= \sum_{i=1}^{n} \nu(F_i)\chi_{E_i}(x)$$

   kde f_A je $\mathscr{S}-$jednoduchá, teda tým skôr merateľná.

2. $\mathscr{K}$ je monotónny systém (pozri definíciu 30), t.j. $E_n, F_n \in \mathscr{K}, E_n \subset E_{n+1}, F_n \supset F_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ implikuje $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{K}, F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathscr{K}$
   Dokážme napr. druhý vzťah. Platí:

   $$f_F(x) = \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^x\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(F_n^x) = \lim_{n\to\infty} f_{F_n}(x)$$

   Teda f_F ako limita postupnosti merateľných funkcií je merateľná funkcia, teda $F \in \mathscr{K}$. (Všimnime si, že práve v tejto časti využívajúc polospojitosť zhora, sme použili konečnosť miery ν.)

3. Z toho, čo sme dokázali vyplýva, že $\mathscr{K}$ obsahuje najmenší monotónny systém $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ nad systémom $\mathscr{R}$. Pretože najmenší monotónny systém nad okruhom sa rovná najmenšiemu $\sigma-$okruhu nad okruhom (pozri lemu 18), máme $\mathscr{K} \supset \mathscr{M}(\mathscr{R}) = \mathscr{S}(\mathscr{R}) = \mathscr{S} \times \mathscr{T}$

Nech μ je konečná miera. f_A je merateľná funkcia, pre ktorú platí:
$0 \le f_A \le \nu(Y)$. Pretože μ je konečná, je konštantná funkcia $\nu(Y)$ integrovateľná, teda je ntegrovateľná aj funkcia f_A. $\square$

Veta 74 *Nech μ, ν sú konečné miery. Definujme na množine $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ funkciu $\mu \times \nu$ vzťahom*

$$\mu \times \nu(A) = \int f_A \mathrm{d}\mu = \int \nu(A^x)\mathrm{d}\mu(x)$$

Potom $\mu \times \nu$ je miera na $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$, pričom

$$\mu \times \nu(E \times F) = \mu(E)\nu(F)$$

pre všetky $E \in \mathscr{S}, F \in \mathscr{T}$.

Dôkaz. Zrejme $\mu \times \nu \ge 0, \mu \times \nu(\emptyset) = 0$. Nech $A_n \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, a_n sú navzájom disjunktné. Potom

$$\mu \times \nu\Big(\bigcup A_n\Big) = \int \nu\Big(\bigcup A_n^x\Big)\mathrm{d}\mu(x) = \\ = \int \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n^x)\mathrm{d}\mu(x)$$

Teraz môžeme použiť Beppo-Leviho vetu na neklesjúcu postupnosť funkcií $\sum\limits_{i=1}^{n} \nu(A_i^x)$, ktorých integrály sú nezáporné a ohraničené zhora číslom $\int \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n^x)\mathrm{d}\mu(x)$. Preto

$$\mu \times \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \nu(A_n^x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu \times \nu(A_n)$$

Napokon nech $E \in \mathscr{S}, F \in \mathscr{T}$. Potom

$$\mu \times \nu E \times F = \int \nu((E \times F)^x)\mathrm{d}\mu(x) = \\ = \int \nu(F)\chi_E(x)\mathrm{d}\mu(x) = \nu(F)\mu(E)$$

$\square$

Veta 75 *Nech $(X, \mathscr{S}, \mu), (Y, \mathscr{T}, \nu)$ sú priestory s mierou, $\mathscr{S}, \mathscr{T}\, \sigma-$algebry, μ, ν konečné miery potom na množine $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ existuje práve jedna miera λ taká, že*

$$\lambda(E \times F) = \mu(E)\nu(F)$$

pre ľubovoľné $E \in \mathscr{S}, F \in \mathscr{T}$.

Dôkaz. Existencia takej miery vyplýva z vety 74. Nech $\lambda, \varkappa$ sú dve miery splňujúce podmienky vety, $A \in \mathscr{R}, A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (E_i \times F_i), E_i \in \mathscr{S}, F_i \in \mathscr{T}$ a množiny $E_i \times F_i$ sú navzájom disjunktné. Potom

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i \times F_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\nu(F_i) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \varkappa(E_i \times F_i) = \varkappa(A)$$

Ako vidno $\lambda, \varkappa$ sú konečné miery na $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ zhodujúce sa na okruhu $\mathscr{R}$. Preto $\lambda(A) = \varkappa(A)$ pre všetky $A \in \mathscr{S}(\mathscr{R}) = \mathscr{S} \times \mathscr{T}$. $\square$

FUBINIHO VETA

Veta 76 *Nech* $(X, \mathscr{S}, \mu), (Y, \mathscr{T}, \nu)$ *sú priestory s mierou,* $\mathscr{S}, \mathscr{T}\, \sigma-$*algebry,* μ, ν *konečné miery. Nech funkcia* $f : X \times Y \to R_1$ *je* $\mu \times \nu-$*integrovateľná funkcia. Potom funkcia* $f^x : Y \to R_1\, (x \in X)$ *definovaná vzťahom*

$$f^x(y) = f(x, y)$$

je $\nu-$ *integrovateľná pre* $\mu-$*skoro všetky* x *a funkcia* $g : X \to R_1$ *definovaná vzťahom*

$$g(x) = \int\limits_Y f^x \mathrm{d}\nu$$

je $\mu-$*integrovateľná a platí:*

$$\int\limits_{X \times Y} f \mathrm{d}\mu \times \nu = \int\limits_X g \mathrm{d}\mu = \\ = \int\limits_X \left[\int\limits_Y f(x, y) \mathrm{d}\nu(y) \right] \mathrm{d}\mu(x)$$

Dôkaz.

1. Nech $f = \chi_E$. Potom $f^x(y) = \chi_E(x, y) = \chi_{E^x}(y)$, teda $f^x = \chi_{E^x}$. Z rovnosti $\int f^x \mathrm{d}\nu = \nu(E^x)$ potom vyplýva:

$$\int f \mathrm{d}\mu \times \nu = \mu \times \nu(E) = \int \nu(E^x) \mathrm{d}\mu(x) = \\ = \int\limits_X \left[\int\limits_Y f^x \mathrm{d}\nu \right] \mathrm{d}\mu(x)$$

   teda veta platí pre charakteristické funkcie.

2. Keď $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ stačí použiť predchádzajúci výsledok a lineárnosť integrálu:

$$\int\limits_{X \times Y} f \mathrm{d}\mu \times \nu = \sum \alpha_i \int\limits_{X \times Y} \chi_{E_1} \mathrm{d}\mu \times \nu = \\ = \sum \alpha_i \int\limits_X \left[\int\limits_Y \chi_{E_i^x} \mathrm{d}\nu \right] \mathrm{d}\mu(x) = \\ = \int\limits_X \left[\sum \alpha_i \int\limits_Y \chi_{E_i^x} \mathrm{d}\nu \right] \mathrm{d}\mu(x) = \\ = \int\limits_X \left[\int\limits_Y \sum \alpha_i \chi_{E_i^x} \mathrm{d}\nu \right] \mathrm{d}\mu(x) = \\ = \int\limits_X \left[\int\limits_Y f^x \mathrm{d}\nu \right] \mathrm{d}\mu(x)$$

3. Nech f je nezáporná integrovateľná funkcia, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesajúca postupnosť jednoducho integrovateľných funkcií taká, že $f_n \geq 0, f = \lim f_n$ a

$$\int\limits_{X\times Y} f\mathrm{d}\mu\times\nu = \lim \int\limits_{X\times Y} f_n\mathrm{d}\mu\times\nu = \lim \int\limits_X \left[\int\limits_Y f_n^x\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu(x)$$

Položme najprv $g_n(x) = \int\limits_Y f_n^x\mathrm{d}\nu$. Potom $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesjúca postupnosť integrovateľných funkcií, $\lim \int\limits_X g_n\mathrm{d}\mu = \int\limits_{X\times Y} f\mathrm{d}\mu\times\nu < \infty$, teda $\lim g_n$ je $\mu-$integrovateľná funkcia a platí:

$$\begin{aligned}\int\limits_{x\times Y} f\mathrm{d}\mu\times\nu = \lim \int\limits_X g_n\mathrm{d}\mu &= \\ &= \int\limits_X \left[\lim \int\limits_Y f_n^x\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

Pretože $\lim g_n$ je integrovateľná, je $\mu-$skoro všade

$$\lim g_n(x) = \lim \int\limits_Y f_n^x\mathrm{d}\nu < \infty$$

Znakom A označme množinu tých x, pre ktoré je $\lim g_n(x) < \infty$. Potom podľa Beppo-Leviho vety platí:

$$\begin{aligned}\int\limits_X \lim g_n\mathrm{d}\mu &= \int\limits_A \left[\lim \int\limits_Y f_n^x\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \int\limits_A \left[\int\limits_Y \lim f_n^x\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \int\limits_X \left[\int\limits_Y \lim f_n^x\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \int\limits_X \left[\int\limits_Y f^x\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu(x) =\end{aligned}$$

Zvyšok dôkazu je formálny:

$$\begin{aligned}\int\limits_{X\times Y} f\mathrm{d}\mu\times\nu &= \int\limits_{X\times Y} f^+\mathrm{d}\mu\times\nu - \int\limits_{X\times Y} f^-\mathrm{d}\mu\times\nu = \\ &= \int\limits_X \left[\int\limits_Y \left(f^+\right)^x\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu(x) - \int\limits_X \left[\int\limits_Y \left(f^-\right)^x\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \int\limits_X \left[\int\limits_Y \left(f^+\right)^x\mathrm{d}\nu - \int\limits_Y \left(f^-\right)^x\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \int\limits_X \left[\int\limits_Y \left(\left(f^+\right)^x - \left(f^-\right)^x\right)\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \int\limits_X \left[\int\limits_Y f^x\mathrm{d}\nu\right]\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

□

NÁHODNÝ VEKTOR

Ukážme aspoň pre ilustráciu, ako možno výsledky týkajúce sa súčinu mier aplikovať v teórii prvdepodobnosti. Za tým účelom zavedieme najprv pojem náhodného vektora a s ním súvisiaci pojem borelovskej množiny v rovine. Pretože budeme musieť rozlíšiť borelovské množiny na priamke a v rovine, označme prvé znakom $\mathscr{B}_1$, druhé znakom $\mathscr{B}_2$

Definícia 50 *Náhodný vektor T je dvojica náhodných premenných; T je teda zobrazenie z Ω do R_2*

Definícia 51 *Systém $\mathscr{B}_2$ všetkých borelovských množín v rovine je nejmenší $\sigma-$okruh nad systémom $\mathscr{P}_2 = \{\langle a, b) \times \langle c, d) : a \leq b, c \leq d\}$, teda $\mathscr{B}_2 = \mathscr{S}(\mathscr{P}_2)$*

Veta 77 *Nech $\mathscr{B}_1 = \mathscr{S}(\mathscr{P}_1)$ je systém všetkých borelovských množín na priamke, $\mathscr{B}_2 = \mathscr{S}(\mathscr{P}_2)$ systém všetkých borelovských množín v rovine. Potom $\mathscr{B}_2 = \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_1$ t.j. $\mathscr{B}_2$ je najmenší $\sigma-$okruh nad systémom $\mathscr{M} = \{E \times F : E \in \mathscr{B}_1, F \in \mathscr{B}_1\}$*

Dôkaz. $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_1$ je $\sigma-$okruh. Zrejme $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_1 \supset \mathscr{M} \supset \mathscr{P}_2$. Preto $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_1 \supset \mathscr{S}(\mathscr{P}_2) = \mathscr{B}_2$.
Aby sme dokázali opačnú inklúziu, vezmime najprv pevne $E \in \mathscr{P}_1$ a uvažujme systém

$$\mathscr{K} = \{F \in \mathscr{B} : E \times F \in \mathscr{B}_2\}$$

Ak $F \in \mathscr{P}_1$, tak $E \times F \in \mathscr{P}_2 \subset \mathscr{B}_2$, teda $F \in \mathscr{K}$. Dokázali sme teda, že $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{K}$. Pretože $\mathscr{K}$ je $\sigma-$okruh (dokážte podrobne; tak isto ďalšie tvrdenia), je $\mathscr{K} \supset \mathscr{S}(\mathscr{P}_1) = \mathscr{B}_1$.
Teda ak $F \in \mathscr{B}_1, E \in \mathscr{P}_1$, tak $E \times F \in \mathscr{B}_2$. Vyberme teraz pevne $F \in \mathscr{B}_1$ a položme:

$$\mathscr{L} = \{E \in \mathscr{B}_1 : E \times F \in \mathscr{B}_2\}$$

Ak $E \in \mathscr{P}_1$, tak podľa predchádzajúceho $E \times F \in \mathscr{B}_2$, teda $E \in \mathscr{L}$. Vidíme teda, že $\mathscr{L} \supset \mathscr{P}_1$. Pretože $\mathscr{L}$ je $\sigma-$okruh, platí inklúzia $\mathscr{L} \supset \mathscr{S}(\mathscr{P}_1) = \mathscr{B}_1$, teda

$$E, F \in \mathscr{B}_1 \Rightarrow E \times F \in \mathscr{B}_2$$

Posledná implikácia znamená tiež to, že $M \subset \mathscr{B}_2$, teda $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_1 = \mathscr{S}(\mathscr{M}) \subset \mathscr{B}_2$. □

Veta 78 *Nech $(\Omega, \mathscr{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Zobrazenie $T = (\xi, \eta) : \Omega \to R_2$ je náhodný vektor vtedy a len vtedy, keď $T^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{B}_2$.*

Dôkaz. Nech T je náhodný vektor. Položme:

$$\mathscr{K} = \left\{E \in \mathscr{B}_2 : T^{-1}(E) \in \mathscr{S}\right\}$$

Ak $E = F \times G, F, G \in \mathscr{B}_1$, tak $\xi^{-1}(F) \in \mathscr{S}, \eta^{-1}(G) \in \mathscr{S}$, teda

$$\begin{aligned} T^{-1}(E) &= \{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in F \times G\} = \\ &= \{\omega : \xi(\omega) \in F\} \cap \{\omega : \eta(\omega) \in G\} = \\ &= \xi^{-1}(F) \cap \eta^{-1}(G) \in \mathscr{S} \end{aligned}$$

Teda $\mathscr{K} \supset \mathscr{M}$. Pretože $\mathscr{K}$ je $\sigma-$okruh, je $\mathscr{K} \supset \mathscr{S}(\mathscr{M}) = \mathscr{B}_2$, teda $T^{-1}(E) = \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{B}_2$.

Naopak, nech $T^{-1}(E) \in \mathscr{S}$ pre všetky $E \in \mathscr{B}_2$. Nech $F, G \in \mathscr{B}_1$. Položme:

$$H = F \times R_1, K = R_1 \times G$$

Potom $H, K \in \mathscr{B}_2$, teda

$$\begin{aligned}\xi^{-1}(E) &= \{\omega : \xi(\omega) \in F\} = \\ &= \{\omega : \xi(\omega) \in F, \eta(\omega) \in R_1\} = \\ &= \{\omega : T(\omega) \in H\} = T^{-1}(H) \in \mathscr{S}\end{aligned}$$

a podobne

$$\eta^{-1}(G) = T^{-1}(K) \in \mathscr{S}$$

Teda $\xi\eta$ sú náhodné premenné. □

Veta 79 *Nech $T = (\xi, \eta)$ je náhodný vektor. Definujme na $\mathscr{B}_1$ funkcie P_ξ, P_η vzťahmi*

$$P_\xi(E) = P\big(\xi^{-1}(E)\big), P_\eta\big(\eta^{-1}(E)\big)$$

a na $\mathscr{B}_2$ funkciu P_T vzťahom

$$P_T(E) = P\big(T^{-1}(E)\big)$$

Potom sú funkcie P_ξ, P_η, P_T prevdepodobnosti. náhodné premenné ξ, η sú nezávislé vtedy a len vtedy, keď

$$P_T = P_\xi \times P_\eta$$

Dôkaz. Tvrdenie o tom, že P_ξ, P_η, P_T sú pravdepodobnosti je zrejmé. Nech ξ, η sú nezávislé náhodné premenné. Miera P_T je definovaná na systéme $\mathscr{B}_2 = \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_1$. Nech $E, F \in \mathscr{B}_1$. Potom

$$\begin{aligned}P_T(E \times F) &= P\big(T^{-1}(E \times F)\big) = P\big(\xi^{-1}(E) \cap \eta^{-1}(F)\big) = \\ &= P\big(\xi^{-1}(E)\big)P\big(\eta^{-1}(F)\big) = P_\xi(E)P_\eta(F)\end{aligned}$$

Teda P_T je miera na $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_1$, pre ktorú platí

$$P_T(E \times F) = P_\xi(E)P_\eta(F)$$

pre všetky $E, F \in \mathscr{B}_1$. Preto P_T je súčinom mier P_ξ, P_η.
Naopak, nech $P_T = P_\xi \times P_\eta$. Potom

$$\begin{aligned}P\big(\xi^{-1}(E)\big)P\big(\eta^{-1}(F)\big) &= P_\xi(E)P_\eta(F) = \\ = P_T(E \times F) = P\big(T^{-1}(E \times F)\big) &= P\big(\xi^{-1}(E) \cap \eta^{-1}(F)\big)\end{aligned}$$

Teda ξ, η sú nezávislé. □

Veta 80 *Nech ξ, η sú nezávislé náhodné premenné. Nech F_1 resp. F_2 resp. F sú distribučné funkcie náhodných premenných ξ resp. η resp. $\xi + \eta$. Potom*

$$F(x) = \int F_1(x - y)\mathrm{d}F_2(y)$$

Dôkaz. Podľa definície

$$\begin{aligned}F(u) &= P(\{\omega : \xi(\omega) + \eta(\omega) < u\}) = \\ &= P(\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in A\})\end{aligned}$$

kde $A = \{(x, y) : x + y < u\}$. Zrejme $A^x = (-\infty, u - x)$. Okrem toho náhodné premenné ξ, η sú nezávislé. Preto $P_T = P_\xi \times P_\eta$ a platí:

$$\begin{aligned}F(u) = P_T(A) = \int_A 1\mathrm{d}P_T &= \int \left[\int_{A^x} 1\mathrm{d}P_\eta(y)\right] \mathrm{d}P_\xi(x) = \\ = \int \left[\int_{-\infty}^{u-x} 1\mathrm{d}P_\eta(y)\right] \mathrm{d}P_\xi(x) &= \int F_2(u - x)\mathrm{d}F_1(x)\end{aligned}$$

Pretože $\xi + \eta = \eta + \xi$, platí tiež

$$F(u) = \int F_1(u - x)\mathrm{d}F_2(x)$$

□

BERNOULLIHO SCHÉMA

Zavedieme Bernoulliho schémy pre nekonečný počet súradníc x_n. Doteraz sme pod pojmom Bernoulliho schéma rozumeli priestor X všetkých $n-$tíc núl a jednotiek, systém $\mathscr{S}$ všetkých podmnožín X a pravdepodobnosť P definovanú "nezávislým"spôsobom. Teraz však urobíme zovšeobecnenie, ktoré bude spočívať v tom, že namiesto dvoch hodnôt pripustíme konenčýc počet hodnôt, napr. k hodnôt: $0, 1, \cdots, k-1$

Definícia 52 *Nech $X_0 = \{0, 1, \cdots, k-1\}$. Znakom X budeme označovať systém vštkých postupností $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov $x_n \in X_0$.*

Definícia 53 *Množina $E \subset X$ sa nazýva elementárny cylinder, ak $E = \emptyset$ alebo ak existuje konečná množina T Prirodzených čísiel a také čísla $k_i \in X_0\,(i \in T)$, že*

$$E = \{x : x_i - k_i \text{ pre všetky } i \in T\}$$

Zjednotenie konečného počtu navzájom disjunktných elementárnych cylindrov sa nazýva cylinder. Systém všektých cylindrov označíme znakom $\mathscr{C}$, systém všetkých elementárnych cylindrov znakom $\mathscr{C}_0$.

Veta 81 *$\mathscr{C}$ je algebra.*

Dôkaz. Najprv uvážme, že $X = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \{x : x_1 = i\} \in \mathscr{C}$. Okrem toho je zrejmé, že $\mathscr{C}$ je uzavretý vzhľadom na zjedontenia navzájom disjunktných množín. Nech $A, B \in \mathscr{C}_0, A = \{x : x_i = k_i, i \in T\}, B = \{x : x_i = m_i, i \in S\}$. Ak existuje také $i \in T \cap S$, že $k_i \neq m_i$, tak $A \cap B = \emptyset \in \mathscr{C}_0$. V opačnom prípade $m_i = k_i$ pre všetky $i \in T \cap S$ a máme:

$$A \cap B = \{x : x_i = k_i \text{ pre } i \in T, x_i = m_i \text{ pre } i \in S - T\} \in \mathscr{C}_0.$$

Dokázali sme teda, že $\mathscr{C}_0$ je uzavretý vzhľadom na prieniky. Ďalej platí:

$$\begin{aligned} B' &= (\{x : x_i = m_i, i \in S\})' = \left(\bigcap_{i \in S} \{x : x_i = m_i\}\right)' = \\ &= \bigcup_{i \in S} \{x : x_i \neq m_i\} = \\ &= \bigcup_{\substack{n_i \neq m_i \\ i \in S}} \{x : x_i = n_i, i \in S\} \in \mathscr{C} \end{aligned}$$

Teda $B \in \mathscr{C}_0 \Rightarrow B' = \mathscr{C}$.
Nech $A, B \in \mathscr{C}, A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, B = \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j, A_i$ resp. B_j sú najvzájom disjunktné prvky z $\mathscr{C}_0$. Potom

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \in \mathscr{C},$$

teda $A, B \in \mathscr{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{C}$.
Ak sú teda $A, B \in \mathscr{C}, B = \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j, B_j \in \mathscr{C}_0, B_j$ navzájom disjunktné, tak

$$A - B = \bigcap_{j=1}^{m} \left(A \cap B_j'\right) \in \mathscr{C}$$

Tým sme dokázali, že $\mathscr{C}$ je uzavretý vzhľadom na rozdiely. Uzavretosť vzhľadom na zjednotenia vyplýva z rovnosti

$$A \cup B = A \cup (B - A)$$

□

Definícia 54 *Nech* $p_0, \cdots, p_{k-1}$ *sú nezáporné čísla,* $\sum_{i=0}^{k-1} p_i = 1$. *Nech* $E = \{x : x_i = k_i, i \in T\} \in \mathscr{C}_0$. *Potom definujeme:*

$$\mu(E) = \prod_{i \in T} p_{k_i}$$

Lema 30 μ *je aditívna množinová funkcia na* $\mathscr{C}_0$.

Dôkaz. Nech $E = \{x : x_i = k_i, i \in T\}, E_j = \{x : x_i = k_{ij}, i \in T_j\} \, (j = 1, \cdots, n)$. Nech E_j sú navzájom disjunktné a $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = E$. Položme $S = \bigcup_{j=1}^{n} T_j$, takže $T \subset S, T_j \subset S \, (j = 1, \cdots, n)$. Znakom A označme systém všetkých elementárnych cylindrov typu

$$\{x : x_i = k_i, i \in T, x_i = l_i, i \in S - T\}$$

Pre rôzne l_i dostávame rôzne elementárne cylindre, teda rôzne prvky systému A. Čísla k_i sú pritom pevné. Miera takého cylindra je číslo

$$\prod_{i \in T} p_{k_i} \prod_{j \in S-T} p_{l_j}$$

Podobne nech A_n je systém všetkých cylindrov tvaru

$$\left\{x : x_i = k_j^i, i \in T_j, x_i = l_i, i \in S - T_j\right\}$$

Nech $S - T$ pozostáva z m prvkov. Potom

$$\sum_{F \in A} \mu(F) = \sum_{l_1=0}^{k-1} \sum_{l_2=0}^{k-1} \cdots \sum_{l_m=0}^{k-1} \prod_{i \in T} p_{k_i} \prod_{j=1}^{m} p_{l_j} = \\ = \prod_{i \in T} p_{k_i} \cdot 1 = \mu(E)$$

(Pozri lemu 1.) Podobne

$$\sum_{F \in A_j} \mu(F) = \mu(E_j)$$

Napokon uvážme, že $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A$, pričom A_j sú navzájom disjunktné. Preto

$$\mu(E) = \sum_{F \in A} \mu(F) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{F \in A_j} \mu(F) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$$

□

Lema 30 umožňuje definovať prirodzeným spôsobom mieru na $\mathscr{C}$. Nech $E \in \mathscr{C}, E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{m} F_j, E_i, F_j \in \mathscr{C}_0, E_i$ resp. F_j sú navzájom disjunktné. Potom

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu(F_j)$$

Definícia 55 *Nech* $E \in \mathscr{C}, E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, E_i \in \mathscr{C}_0, E_i$ *navzájom disjunktné potom definujeme:*

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

Vsvetlime si teraz pojem $T-$cylindra, ktorý použijeme v nasledujúcej leme $E \in \mathscr{C}_0, E = \{x : x_i = k_i, i \in S\}$, S konečná množina. E sa nazýva $T-$cylindrom, ak $S \subset T$. Množina $E \in \mathscr{C}$, kde $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, E_i \in \mathscr{C}_0$ sa nazýva $T-$cylindrom, ak sú $T-$cylindrami všetky E_i.

Lema 31 *Nech E je $T-$cylinder. Nech $x_i = y_i$ pre všetky $i \in T$ a nech $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in E$. Potom aj $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in E$.*

Dôkaz. Predpokladajme najprv, že $E = \{x : x_i = k_i, i \in S\} \in \mathscr{C}_0$, $S \subset T$. Pretože $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, platí $x_i = k_i$ pre všetky i, ale aj $y_i = x_i = k_i$ pre $i \in S$. Preto aj $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in E$.
Nech $E \in \mathscr{C}, E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j, E_j \in \mathscr{C}_0\,(j = 1, \cdots, n)$. Ak $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in E$, tak existuje index j, pre ktorý $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in E_j$. Podľa predpokladu E_j je $T-$cylinder, teda $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in E_j \subset E$. □

Veta 82 *μ je miera na $\mathscr{C}$.*

Dôkaz. [6] μ je aditívna (čo sa ľahko dokáže na základe lemy 30), nezáporná, definovaná na algebre (veta 81). Teraz dokážeme, že je polospojitá zhora v prázdnej množine, t.j.
$E_n \supset E_{n+1}, E_n \in \mathscr{C}\,(n = 1, 2, \cdots)$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset \Rightarrow \lim \mu(E_n) = 0$. Táto vlastnosť je zrejme ekvivalentná s inou:
$\mu(E_n) \geq \varepsilon > 0\,(n = 1, 2, \cdots), E_n \supset E_{n+1}, E_n \in \mathscr{C}\,(n = 1, 2, \cdots) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \neq \emptyset$.
Nech teda existuje $\varepsilon > 0$, pre ktoré
$\mu(E_n) \geq \varepsilon, E_n \supset E_{n+1}, E_n \in \mathscr{C}\,(n = 1, 2, \cdots)$. Máme dokázať, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \neq \emptyset$.
Z nerovnosti $\mu(E_n) \geq \varepsilon$ využijeme len to, že $E_n \neq \emptyset\,(n = 1, 2, \cdots)$. Nech $x^n \in E_n, x_n = \{x_i^n\}_{i=1}^{\infty}$. Utvorme schému

$$\begin{gathered}
\left\{x_1^1, x_2^1, x_3^1, \cdots, x_i^1, \cdots\right\} \in E_1 \\
\left\{x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots, x_i^2, \cdots\right\} \in E_2 \\
\left\{x_1^3, x_2^3, x_3^3, \cdots, x_i^3, \cdots\right\} \in E_3 \\
\vdots \\
\{x_1^n, x_2^n, x_3^n, \cdots, x_i^n, \cdots\} \in E_n \\
\vdots
\end{gathered}$$

Všimnime si prvý stĺpec v tejto schéme, teda postupnosť $\{x_1^n\}_{n=1}^{\infty}$. Členy tejto postupnosti sú prvky konečnej množiny $\{0, 1, \cdots, k-1\}$. Preto existuje prvok $x_1 \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$, ktorý sa v postupnosti $\{x_1^n\}_{n=1}^{\infty}$ vyskytuje nekkonečne veľakrát. Z postupnosti $\{x_2^n\}_{n=1}^{\infty}$ (druhý stĺpec) vyberme len tie prvky x_2^n, pre ktoré $x_1^n = x_1$. Takýchto prvkov je nekonečne veľa. Preto exsituje taký prvok $x_2 \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$, že $x_1^n = x_1, x_2^n = x_2$ pre nekonečne veľa indexov n. Je zrejmé, že takto možno zostrojiť postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots\}$, ktorej členy sú prvky množiny $\{0, 1, \cdots, k-1\}$ a o ktorej platí: Pre každé i existuje nekonečne veľa takých indexov n, že súčasne
$x_1^n = x_1, x_2^n = x_2, \cdots, x_i^n = x_i$.
Dokážeme, že $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Tým bude dokázané, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset$. Nech E_n je $T-$cylinder; zvoľme i tak, aby $T \subset \{1, 2, \cdots, i\}$. Ďalej zvoľme $m \geq n$ tak, aby

$$x_1^m = x_1, x_2^m = x_2, \cdots, x_i^m = x_i$$

Podľa predpokladu

$$\left\{x_1^m, x_2^m, \cdots, x_1^m, \cdots, x_i^m, x_{i+1}^m, \cdots\right\} \in E_m \subset E_n$$

Pretože E_n je $T-$cylinder a $x_i = x_i^m$ pre všetky $i \in T$, podľa lemy 31 platí:

$$\{\}_{i=1}^{\infty} = \{x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots\} \in E_n$$

[6] Autorom tohto dôkazu je doc. RNDr. T. Neubrunn

pre každé n, čo aj bolo treba dokázať.

Podľa cvič. 2 kap. 2 μ je $\sigma-$aditívna. Ostatne, dôkaz je veľmi jednoduchý.

Nech $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n, F, F_n \in \mathscr{C}\,(n = 1, 2, \cdots), F_n$ sú navzájom disjunktné.

Položme $E_n = F - \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$. Potom

$E_n \in \mathscr{C}, E_n \supset E_{n+1}\,(n = 1, 2, \cdots), \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Preto

$$
\begin{aligned}
0 = \mu(\emptyset) &= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(F - \bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \\
&= \mu(F) - \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \mu(F) - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) = \\
&= \mu(F) - \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)
\end{aligned}
$$

□

CVIČENIA

1. Dokážte, $\left(\bigcup E_n\right)^x = \bigcup E_n^x, \left(\bigcap E_n\right)^x = \bigcap E_n^x, (E - F)^x = E^x - F^x$.

2. Nech $\mathscr{T}$ je $\sigma-$algebra podmnožín množiny $Y, \mathscr{K} = \{E \subset X \times Y : Er \in \mathscr{T}\}$. Dokážte, že $\mathscr{K}$ je $\sigma-$algebra.

3. Nech $f : X \times Y \to R_1$ je merateľná funkcia vzhľadom na $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$. Potom je funkcia f^x definovaná vzťahom $f^x(y) = f(x, y)$ merateľná vzhľadom na $\mathscr{T}$. Dokážte.

4. Vypočítajte dvojný integrál
$$\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
ak D je ohraničená krivkami $x = y^2, y = x - 2$.

5. Nech $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ sú okruhy, $\mathscr{S}(\mathscr{R}_1), \mathscr{S}(\mathscr{R}_2)$ najmenšie $\sigma-$okruhy nad $\mathscr{R}_1$ resp. $\mathscr{R}_2$. Potom $\mathscr{S}(\mathscr{R}_1) \times \mathscr{S}(\mathscr{R}_2)$ je najmenší $\sigma-$okruh nad systémom $\{E \times F : E \in \mathscr{R}_1, F \in \mathscr{R}_2\}$.

6. Nech $(X, \mathscr{S}, \mu)$ je priestor miery, $T : X \to Y$. Ak $\mathscr{U} = \left\{E \subset Y : T^{-1}(E) \in \mathscr{S}\right\}$, tak $\mathscr{U}$ je $\sigma-$okruh. Dokážte, že ak na $\mathscr{U}$ definujeme funkciu ν vzťahom $\nu(E) = \mu\big(T^{-1}(E)\big)$, tak ν je miera.

LITERATÚRA PRE ĎALŠIE ŠTÚDIUM

Za tých 40 rokov od prvého vydania tejto knižky sa zmenil obraz s naším textom súvisiacej literatúry. Okrem toho ruské pôvodiny i preklady prestali byť dostupné našej mládeži. Zamerime sa najmä na literatúru dostupnú v našich kníhkupectvách, resp. knižniciach.

Vhodným úvodom do pravdepodobnostnej problematiky sú knihy

Janková, K. - Pázman, A.: Pravdepodobnosť a štatistika, Bratislava, Vydavateľstvo UK 2011.
Maličký, P. - Riečan, B.: Pravdepodobnosť a štatistika, Banská Bystrica, FPV UMB 2012.
Markechová, D. - Tirpáková, A. - Stehlíková, B.: Základy štatistiky pre pedagógov, Nitra PFV UKF 2011.
Rényi, A: Teorie pravděpodobnosti, Praha, Academia 1972.
Zvára, K - Štěpán, J.: Pravděpodobnost a matematická štatistika, Praha, Matfyzpres 1997.

Na základe vedomostí získaných z tejto knižky sú čitateľovi dostupné napr. aj tieto publikácie:

Dvurečenskij, A. - Pulmannová, S.: New Trends in Quantum Structures, Amsterdam, Kluwer 2000.
Neubrunn T. - Riečan, B.: Miera a integrál, Bratislava, Veda 1981.
Markechová, D.: Dynamické systémy a ich entropia, Nitra, PFV UKF 2011.
Pták, P. - Pulmannová, S.: Teória kvantových logík, Bratislava, Veda 1989.
Riečan, B. - Neubrunn, T.: Teória miery, Bratislava, Veda 1992.
Štěpán, J.: Teorie pravděpodobnosti, Praha, Academia, 1972.

Integrovaniu sú venované knihy

Boccuto, A. - Riečan, B. - Vrábelová, M.: Kurzweil-Henstock integral in Riesz Spaces, Betham 2009.
Jarník, V.: Integrální počet II, Praha, Academia 1955.
Kluvánek, I.: Integrálny počet funkcie jednej reálnej premennej, Ružomberok, PF KU 2008.
Riečan, B. - Neubrunn, T.: Integral, measure, and oredering, Dordrecht, Kluwer 1997.
Rudin, W.: Analýza v reálném a komplexním oboru. Praha, Academia 2003.
Šilov, G.E - Gurevič, B.L.: Integrál, míra a derivace. Praha, SNTL 1968.

Obsah

Názov:	O PRAVDEPODOBNOSTI A MIERE
Autor:	Beloslav Riečan
Vydavateľ:	© BELIANUM. Vydavateľstvo UMB v Banskej Bystrici
Edícia:	Fakulta prírodných vied
Vydanie:	druhé – doplnené vydanie
Počet strán:	209
Formát:	CD
Rok 2. vydania:	2015
Miesto vydania:	Banská Bystrica

ISBN 978-80-557-0907-9