Miniteória pravdepodobnosti

Beloslav Riečan

BELIANUM

2015

MINITEÓRIA PRAVDEPODOBNOSTI

Autor : © Dr.h.c. prof. RNDr. Beloslav Riečan, DrSc.

Recenzovali :
doc. RNDr. Katarína Janková, CSc.
doc. RNDr. Marta Vrábelová, CSc.

Vydavateľ: © BELIANUM. Vydavateľstvo UMB v Banskej Bystrici
Edícia: Fakulta prírodných vied

Schválila Edičná komisia Fakulty prírodných vied UMB v Banskej Bystrici ako vysokoškolský učebný text pre študentov FPV UMB v Banskej Bystrici. Za odbornú a jazykovú stránku tohto textu zodpovedá autor.

ISBN 978-80-557-0908-6

Miniteória pravdepodobnosti

Beloslav Riečan

Kolmogorovova teória pravdepodobnosti založená na teórii množín patrí medzi najvýznamnejšie výsledky matematiky 20. storočia. Pravda, skutočnosť, ktorá je jej prednosťou, totiž možnosť používať výsledky modernej teórie miery, zvykne niekedy brániť jej širšiemu porozumeniu.

Cieľom priložených listov je prispieť k preklenutiu tohto protikladu. Čitateľovi chceme predložiť text predovšetkým zrozumiteľný a nie príliš rozsiahly. Veď keď on pochopí základné myšlienky, ľahko sa sám bude pohybovať v príslušnej literatúre i dobroprajnej spoločnosti.

Dovoľte ešte poďakovať sa recenzentkám za podporu uvedenej myšlienky a starostlivé prečítanie rukopisu.

1. Pravdepodobnosť

Pravdepodobnosť je funkcia, ktorá každej množine A z určitého systému množín $\mathcal{S}$ priraďuje číslo $P(A) \in [0,1]$. O systéme $\mathcal{S}$ sa zvykne predpokladať, že je σ-algebrou.

Definícia 1.1. Nech Ω je neprázdna množina, $\mathcal{S}$ je systém podmnožín množiny Ω. Povieme, že $\mathcal{S}$ je σ-algebra, ak platí

(i) $\Omega \in \mathcal{S}$,

(ii) $A \in \mathcal{S} \Longrightarrow \Omega - A \in \mathcal{S}$,

(iii) $A_n \in \mathcal{S}(n = 1, 2, ...) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

Pravdaže, σ-algebra je uzavretá ku všetkým bežným operáciám. Napr.

$$\emptyset = \Omega - \Omega \in \mathcal{S}.$$

Ak

$$A_1, A_2, ...A_n \in \mathcal{S},$$

tak aj

$$\bigcup_{n=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup ... \in \mathcal{S}.$$

Podobne, ak $A_n \in \mathcal{S}(n = 1, 2, ...)$, tak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n')' \in \mathcal{S},$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S},$$

či

$$A - B = A \cap B' \in \mathcal{S},$$

ak $A, B \in \mathcal{S}$.

Definícia 1.2. Nech $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožín množiny $\Omega, P : \mathcal{S} \to [0,1]$. Povieme, že P je pravdepodobnosť, ak platí

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) P je σ-aditívna, t.j.

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

kedykoľvek $A_n \in S(n = 1, 2, ...), A_n \cap A_m = \emptyset(n \neq m)$.

Azda najjednoduchším príkladom pravdpodobnostného priestoru je konečná množina $\Omega = \{u_1, ..., u_n\}$ so systémom $\mathcal{S}$ všetkých podmnožín množiny Ω a pravdepodobnosťou P definovanou vzťahom

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega},$$

kde $cardA$ je počet prvkov množiny A.

Podľa predošlého je pravdepodobnosť jednoprvkovej množiny $A = \{u\}$ číslo

$$P(A) = \frac{1}{card\Omega} = \frac{1}{n}.$$

Črtá sa prirodzené matematické zovšeobecnenie tohto modelu, keď pravdepodobnosti jednotlivých prvkov $u_1, u_2, ..., u_n \in \Omega$ sú nezáporné čísla $p_1, p_2, ..., p_n$ také, že

$$\Sigma_{i=1}^n p_i = p_1 + ... + p_n = 1.$$

Špeciálny prípad je ten, keď $p_i = \frac{1}{n}(i = 1, 2, ..., n)$. V tomto prípade je prirodzené a efektívne (aj z hľadiska Kolmogorovovej teórie) definovať

$$P(A) = \Sigma_{u_i \in A} p_i = \Sigma\{p_i; u_i \in A\}.$$

Ľahko vidieť, že

$$P(\Omega) = \Sigma\{p_i; x_i \in \Omega\} = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Z axiom 1 a 2 možno odvodiť ďalšie vlastnosti pravdepodobnosti.

Propozícia 1.1. $P(\emptyset) = 0$.

Dôkaz. Položme $A_n = \emptyset(n = 1, 2, ...)$. Množiny $A_n \in \mathcal{S}(n = 1, 2, ...)$ a sú navzájom disjunktné. Preto

$$P(\emptyset) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(\emptyset) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \Sigma_{i=1}^n P(\emptyset) = \lim_{n \to \infty} nP(\emptyset).$$

Keby $P(\emptyset) > 0$, tá limita by bola ∞, čo nie je možné. Preto $P(\emptyset) = 0$.

Propozícia 1.2. Pravdepodobnosť je aditívna, teda ak $A_1, ..., A_n \in \mathcal{S}, A_i \cap A_j = \emptyset(i \neq j)$, tak

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Dôkaz. Stačí položiť $A_i = \emptyset$ pre $i \geq n+1$. Potom

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Propozícia 1.3. Ak $A \subset B, A, B \in \mathcal{S}$, tak

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(A) \leq P(B).$$

Špeciálne

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Dôkaz. Zrejme

$$A, B - A \in \mathcal{S}, A \cap (B - A) = \emptyset.$$

Preto

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) \geq P(A).$$

Ak položíme $B = \Omega$, tak $\Omega - A = A'$, teda

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(A').$$

Propozícia 1.4. Nech $A_n \in \mathcal{S}, A_n \subset A_{n+1} (n = 1, 2, ...), A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (budeme značiť $A_n \nearrow A$). Potom

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

Dôkaz. Položme

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, ..., B_n = A_n - A_{n-1}, ...$$

Potom $B_n \in \mathcal{S}$ $(n = 1, 2, ...)$ $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ a

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A.$$

Preto

$$P(A) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \to \infty} \Sigma_{i=1}^{n} P(B_i).$$

Ale

$$\Sigma_{i=1}^{n} P(B_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = P(A_n),$$

teda

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Propozícia 1.5. Nech $A_n \in \mathcal{S}, A_n \supset A_{n+1} (n = 1, 2., ...), A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$(budeme značiť $A_n \searrow A$). Potom

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Dôkaz. Položme $B_n = A_n' (n = 1, 2, ...)$. Potom $B_n = A_n' \nearrow A' = B$. Preto

$$1 - P(A) = P(A') = P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n') = \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n),$$

teda

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

2. Náhodná premenná

Definícia 2.1. Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, t. j. $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožín množiny $\Omega, P : \mathcal{S} \to [0,1]$ je pravdepodobnosť. Náhodná premenná (= náhodná veličina) je taká funkcia $\xi : \Omega \to R$, že

$$\{\omega \in \Omega; \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{S}$$

pre každé $x \in R$. Distribučná funkcia F náhodnej premennej ξ je funkcia $F : R \to [0,1]$ definovaná rovnosťou

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega; \xi(\omega) < x\}).$$

Príklad. Nech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \mathcal{S}$ je systém všetkých podmnožín množiny $\Omega, P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}, P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}, P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{8}$. $P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{8}$. Ďalej definujme $\xi(\{\omega_1\}) = 0, \xi(\{\omega_2\}) = -1, \xi(\{\omega_3\}) = 2, \xi(\{\omega_4\}) = 2$. Ak $x \leq -1$, tak

$$\{\omega; \xi(\omega) < x\} = \{\omega; \xi(\omega) < -1\} = \emptyset,$$

teda $F(x) = P(\emptyset) = 0$. Ak $-1 < x \leq 0$, tak

$$\{\omega; \xi(\omega) < x\} = \{\omega_2\},$$

teda $F(x) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}$. Ak $0 < x \leq 2$, tak

$$\{\omega; \xi(\omega) < x\} = \{\omega_1, \omega_2\},$$

teda $F(x) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ak $2 < x$, tak

$$\{\omega; \xi(\Omega) < x\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \},$$

teda $F(x) = P(\Omega) = 1$.

Veta 2.1. Nech F je distribučná funkcia náhodnej premennej ξ. Potom platí

$(i)F$ je neklesajúca;

$(ii)F$ je spojitá zľava v každom bode;

$(iii) \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$;

$(iv) \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Dôkaz. Ak $x_1 < x_2$, tak $\{\omega; \xi(\omega) < x_1\} \subset \{\omega; \xi(\omega) < x_2\}$, teda

$$F(x_1) = P(\{\omega; \xi(\omega) < x_1\}) \leq P(\{\omega; \xi(\omega) < x_2\}) = F(x_2)$$

a F je neklesajúca.

Nech $x_0 \in R$ je ľubovoľný bod. Nech $x_n \nearrow x_0$ je ľubovoľná postupnosť. Máme dokázať, že $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0)$. Ale

$$A_n = \{\omega; \xi(\omega) < x_n\} \nearrow A = \{\omega; \xi(\omega) < x_0\}.$$

Preto

$$F(x_0) = P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Ďalej nech $(x_n)_n$ je ľubovoľná neklesajúca postupnosť taká, že $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Potom

$$1 = P(\Omega) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega; \xi(\omega) < x_n\}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\{\omega; \xi(\omega) < x_n\}) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Preto $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Konečne, nech $(x_n)_n$ je nerastúca, $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Potom

$$0 = P(\emptyset) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega; \xi(\omega) < x_n\}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(\{\omega; \xi(\omega) < x_n\}) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Preto $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Keďže náhodná veličina je zobrazenie $\xi : \Omega \to R$, môžeme používať aj pojem vzor množiny $A \subset R$, čo je množina

$$\xi^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega; \xi(\omega) \in A\}.$$

Pri tomto označení

$$F(x) = P(\xi^{-1}((-\infty, x))).$$

Ale nielen vzor intervalov typu $(-\infty, a)$ patrí do $\mathcal{S}$.

Veta 2.2. Nech $\xi :\to R$ je náhodná veličina, $\mathcal{T} = \{A \subset R; \xi^{-1}(A) \in \mathcal{S}\}$ Potom $\mathcal{T}$ je σ-algebra podmnožín množiny R.

Dôkaz. V prvom rade

$$\xi^{-1}(R) = \Omega \in \mathcal{S},$$

teda $R \in \mathcal{T}$. Ďalej nech $A \in \mathcal{T}, t.j.\ \xi^{-1}(A) \in \mathcal{S}$. Potom

$$\xi^{-1}(A') = (\xi^{-1}(A))' \in \mathcal{S},$$

teda $A' \in \mathcal{T}$. Konečne, nech $A_n \in \mathcal{T}(n = 1, 2, ...)$, t.j. $\xi^{-1}(A_n) \in \mathcal{S}$ $(n = 1, 2, ...)$. Potom

$$\xi^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}(A_n) \in \mathcal{S},$$

teda $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$.

Pravda, takých σ-algebier ako systém $\mathcal{T}$ z vety 2.2 je veľa, napr. systém všetkých podmnožín množiny R. Používať budeme prienik všetkých σ-algebier obsahujúcich systém $\mathcal{J}$ intervalov typu $(-\infty, a)$. Vôbec nad ľubovoľným neprázdnym systémom $\mathcal{P}$ podmnožín množiny R možno zostrojiť najmenšiu σ-algebru obsahujúcu $\mathcal{P}$.

Veta 2.3. Nech $\mathcal{P}$ je ľubovoľný neprázdny systém podmnožín množiny R. Potom existuje taká σ-algebra $\sigma(\mathcal{P}) \supset \mathcal{P}$, že $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{U}$ pre všetky σ-algebry $\mathcal{U} \supset \mathcal{P}$. σ-algebra $\sigma(\mathcal{P})$ je určená jednoznačne.

Dôkaz. Nech $\sigma(\mathcal{P})$ je prienik všetkých σ-algebier obsahujúcich systém $\mathcal{P}$. Ak $A \in \sigma(\mathcal{P}), \mathcal{P} \subset \mathcal{U}$. Potom $A \in \mathcal{U}$, teda aj $A' \in \mathcal{U}$. Keďže $\mathcal{U}$ je ľubovoľná σ-algebra nad $\mathcal{P}$, je aj $A' \in \sigma(\mathcal{P})$.

Konečne, nech $A_n \in \sigma(\mathcal{P})$ $(n = 1, 2, ...)$,$\mathcal{U}$ je σ-algebra obsahujúca $\mathcal{P}$. Potom $A_n \in \mathcal{U}(n = 1, 2, ...)$, teda aj $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$. Keďže $\mathcal{U}$ je ľubovoľná σ-algebra nad $\mathcal{P}$, platí $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{P})$.

Definícia 2.2. Nech $\mathcal{J}$ je systém všetkých intervalov typu $(-\infty, x), x \in R$. Potom σ-algebru $\sigma(\mathcal{J})$ budeme označovať znakom $\mathcal{B}(R)$ a množiny patriace do σ-algebry $\mathcal{B}(R)$ budeme nazývať Borelove.

Veta 2.4. Nech $\xi : \Omega \to R$ je náhodná veličina. Potom pre ľubovoľnú množinu $A \in \mathcal{B}(R)$ platí $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{S}$.

Dôkaz. Nech $\mathcal{J}$ je systém všetkých intervalov typu $(-\infty, x), x \in R, \mathcal{U} = \{A \subset R; \xi^{-1}(A) \in \mathcal{S}\}$. Zrejme $\mathcal{U} \supset \mathcal{J}$. Podľa vety 2.2 $\mathcal{U}$ je σ-algebra. Preto $\mathcal{U} \supset \sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(R)$. Ak teda $A \in \mathcal{B}(R)$, tak $A \in \mathcal{U}$, teda $\xi^{-1}(A) \in \mathcal{S}$.

Pravdaže, Borelove množiny môžeme charakterizovať všelijako. Ukážeme to na príklade.

Príklad 2.1. Nech $\mathcal{C} = \{[a,b]; a, b \in R\}$. Potom $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(R)$.

Máme ukázať dve inklúzie. Nech najprv $[a.b] \in \mathcal{C}$. Vieme, že $(-\infty, b+\frac{1}{n}) \in \mathcal{J} \subset \mathcal{B}(R)$ pre každé $n \in N$. Preto aj

$$[a, b + \frac{1}{n}) = (-\infty, b + \frac{1}{n}) - (-\infty, a) \in \mathcal{B}(R).$$

Odtiaľ dostávame, že

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, b + \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}(R),$$

teda

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(R).$$

Keďže $\mathcal{B}(R)$ je σ-algebra nad $\mathcal{C}$, máme $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(R)$.

Naopak, nech $(-\infty, c) \in \mathcal{J}$. Potom

$$(-\infty, c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [c - n, c - \frac{1}{n}] \in \sigma(\mathcal{C}),$$

teda

$$\mathcal{J} \subset \sigma(\mathcal{C}).$$

Keďže $\sigma(\mathcal{C})$ je σ-algebra, máme $\mathcal{B}(R) = \sigma(\mathcal{J}) \subset \sigma(\mathcal{C})$.

Každá náhodná veličina je charakterizovaná svojou distribučnou funkciou. Navyše aj pravdepodobnosťou na $\mathcal{B}(R)$.

Veta 2.5. Nech $\xi : \Omega \to R$ je náhodná premenná, $F : R \to [0, 1]$ jej distribučná funkcia. Potom existuje práve jedna taká pravdepodobnosť $\lambda_F : \mathcal{B}(R) \to [0, 1]$, že

$$\lambda_F([a, b)) = F(b) - F(a)$$

pre všetky intervaly $[a, b)$.

Dôkaz.

1. Existencia. Definujme pre $A \in \mathcal{B}(R), \lambda_F(A) = P(\xi^{-1}(A))$. Máme

$$\lambda_F(R) = P(\xi^{-1}(R)) = P(\Omega) = 1.$$

Nech $A_n \in \mathcal{B}(R)(n = 1, 2, ...), A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$. Potom

$$\lambda_F(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\xi^{-1}((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}(A_n)).$$

Ale pre $i \neq j$

$$\xi^{-1}(A_i) \cap \xi^{-1}(A_j) = \xi^{-1}(A_i \cap A_j) = \xi^{-1}(\emptyset) = 0.$$

Preto

$$\lambda_F(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}(A_n)) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(\xi^{-1}(A_n)) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \lambda_F(A_n).$$

Navyše

$$\lambda_F([a, b)) = \lambda_F((-\infty, b) - (-\infty, a)) =$$
$$= \lambda_F((-\infty, b)) - \lambda_F((-\infty, a)) =$$
$$= P(\xi^{-1}((-\infty, b)) - P(\xi^{-1}((-\infty, a)) = F(b) - F(a).$$

2. Jednoznačnosť

Nech $\mu : \mathcal{B}(R) \to [0, 1]$ je taká pravdepodobnosť, že

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$$

pre všetky intervaly $[a, b)$. Definujme systém množín

$$\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{B}(R); \mu(A) = \lambda_F(A)\}.$$

Z propozícií 1.4 a 1.5 vyplýva, že systém $\mathcal{K}$ je monotónny, t.j.

$$A_n \in \mathcal{K} \ (n = 1, 2, ...), \ A_n \nearrow A \Longrightarrow A \in \mathcal{K},$$

$$B_n \in \mathcal{K} \ (n = 1, 2, ...), \ B_n \searrow B \Longrightarrow B \in \mathcal{K}.$$

Navyše $\mathcal{K} \supset \mathcal{R}$, kde $\mathcal{R}$ je pozostáva z konečných zjednotení intervalov typu $[a, b)$ a intervalov typu $(-\infty, c)$. Nech $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ je najmenší monotónny systém nad $\mathcal{R}$. Podľa definície $\mathcal{K} \supset \mathcal{M}(\mathcal{R})$. Ak ukážeme, že $\mathcal{M}(R)$ je algebra, vyplynie z toho, že $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ je σ-algebra nad $\mathcal{J}$, teda $\mathcal{K} \supset \sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(R)$.

Uvažujme $A \in \mathcal{R}$ pevne a položme

$$\mathcal{K}_A = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{R}); A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})\}.$$

Podľa predpokladu $\mathcal{K}_A \supset \mathcal{R}$. Ľahko vidieť, že $\mathcal{K}_A$ je monotónny, teda $A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ pre všetky $B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$. vezmime teraz pevne $B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ a

$$\mathcal{L}_B = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{R}); A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})\}.$$

Podľa predošlého $\mathcal{L}_B \supset \mathcal{R}$. Keďže $\mathcal{L}_B$ je monotónny, máme $\mathcal{L}_B \supset \mathcal{M}(\mathcal{R})$, teda pre ľubovoľné $A \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ je $A \in \mathcal{L}_B$, teda $A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$.

Ukázali sme, že $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ je uzavretý vzhľadom na zjednotenia. Podobne sa dá dokázať, že $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ je uzavretý vzhľadom na rozdiel množín. Okrem toho

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}),$$

teda $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ je skutočne σ-algebra, čo sme mali dokázať.

3. Stredná hodnota

Teória pravdepodobnosti má svoj predmet bádania, ktorým je fenomén náhody. Ale Kolmogorovova axiomatika vychádza z teórie miery. Základné jej pojmy sú tri:

pravdepodobnosť = miera
náhodná veličina = merateľná funkcia
stredná hodnota = integrál.

Uveďme motiváciu strednej hodnoty ako integrálu

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi dP.$$

Nech ξ nadobúda konečný počet hodnôt

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$$

s pravdepobnosťami

$$p_1, p_2, ..., p_n,$$

teda

$$p_i = P(\{\omega \in \Omega; \xi(\omega) = \alpha_i\} = P(\xi^{-1}(\{\alpha_i\})).$$

Potom stredná hodnota $E(\xi)$ je vážený priemer

$$E(\xi) = \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i p_i.$$

Ale

$$\Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i p_i = \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i P(\{\omega; \xi(\omega) = \alpha_i\}) =$$
$$= \int_{\Omega} \xi dP.$$

Uvedenú definíciu rozšírime na širšiu triedu integrovateľných funkcií, a to tak, ako je to v súčasnej matematike zvykom. Totiž, ak strednú hodnotu chápeme ako integrál, potrebujeme je mať k dispozícii pre mohutnejšiu množinu náhodných veličín.

Definícia 3.1. Náhodná veličina $\xi : \Omega \to R$ je jednoduchá, ak nadobúda konečný počet hodnôt

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n.$$

Jej strednú hodnotu definujeme ako integrál

$$\int_\Omega \xi dP = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i P(\{\omega; \xi(\omega) = \alpha_i\}).$$

Ak je ξ nezáporná náhodná veličina, vezmeme takú postupnosť $(\xi_n)_n$, že $\xi_n \nearrow \xi$. Funkcia ξ je integrovateľná, ak je $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n dP$ konečná. V tom prípade definujeme

$$\int_\Omega \xi dP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n dP.$$

Konečne, ľubovoľná náhodná veličina $\xi : \Omega \to R$ je integrovateľná, ak sú integrovateľné funkcie

$$\xi^+ = \max(\xi, 0), \xi^- = \max(-\xi, 0).$$

V tom prípade definujeme

$$\int_\Omega \xi dP = \int_\Omega \xi^+ dP - \int_\Omega \xi^- dP.$$

Pravda, aby definícia 3.1 bola korektná, treba dokázať:

1. K ľubovoľnej $\xi \geq 0$ existuje taká neklesajúca postupnosť $(\xi_n)_n$ jednoduchých funkcií, že $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n, \xi_n \nearrow \xi$. .

2. Číslo $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n dP$ nezávisí od výberu postupnosti $(\xi_n)_n$, ale len od funkcie ξ.

Veta 3.1. K ľubovoľnej nazápornej náhodnej veličine ξ existuje taká postupnosť $(\xi_n)_n$ nezáporných jednoduchých funkcií, že $\xi_n \nearrow \xi$. .

Dôkaz. Položme

$$\xi_n(\omega) = n,$$

ak

$$\xi(\omega) \geq n,$$

resp.

$$\xi_n(\omega) = \frac{j-1}{2^n}$$

ak

$$\frac{j-1}{2^n} \leq \xi(\omega) < \frac{j}{2^n},$$

kde $j = 1, 2, ..., 2^n$.

Veta 3.2. Nech ξ je nezáporná náhodná veličina, $(\xi_n)_n, (\eta_n)_n$ sú také postupnosti jednoduchých nezáporných náhodných veličín, že $\xi_n \nearrow \xi, \eta_n \nearrow \xi$.

Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n dP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \eta_n dP$$

V dôkaze vety 3.2 použijeme dve lemy.

Lema 3.1. Nech $(\xi_n)_n$ je taká postupnosť jednoduchých náhodných veličín, že $\xi_n \searrow 0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n dP = 0.$$

Dôkaz. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné číslo. Definujme

$$A_n = \{\omega \in \Omega; \xi_n \geq \varepsilon\}.$$

Potom

$$\int_\Omega \xi_n dP = \int_\Omega \xi_n \chi_{A_n} dP + \int_\Omega \xi_n \chi_{A'_n} dP \leq$$

$$\leq P(A_n) \max \xi_1 + \varepsilon.$$

Ale $A_n \searrow \emptyset$. Preto podľa propozície 1.5 $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. Preto

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n dP \leq \varepsilon$$

pre každé $\varepsilon > 0$, teda $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n dP = 0$.

Lema 3.2. Nech η_n sú jednoduché, η jednoduchá, $\eta_n \nearrow \eta$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \eta_n dP = \int_\Omega \eta dP.$$

Dôkaz. Stačí vziať $\xi_n = \eta - \eta_n$ a použiť lemu 3.1.

Dôkaz vety 3.2.

Nech $0 \leq \xi_n \nearrow \xi, 0 \leq \eta_n \nearrow \xi, \xi_n, \eta_n$ sú jednoduché. Pri pevnom m

$$\min(\xi_n, \eta_m) \nearrow \min(\xi, \eta_m) = \eta_m.$$

Preto podľa lemy 3.2

$$\int_\Omega \eta_m dP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \min(\xi_n, \eta_m) dP \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n dP.$$

Z predošlej nerovnosti vyplýva

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \eta_n dP \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n dP.$$

Tým, že sme strednú hodnotu definovali pomocou integrálu, môžeme používať bežné vety z teórie integrovania. Napr. ak ξ, η sú integrovateľné a $\alpha, \beta \in R$, tak

$$E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E(\xi) + \beta E(\eta).$$

Teda napr. ak $\xi_1, ..., \xi_n$ majú tú istú strednú hodnotu $E(\xi_i) = a$ a $\bar{\xi}$ je ich aritmetický priemer

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n \xi_i,$$

tak

$$E(\bar{\xi}) = E(\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n \xi_i) = \frac{1}{n}E(\Sigma_{i=1}^n \xi_i) =$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n E(\xi_i) = \frac{1}{n}na = a.$$

Trochu menej známa je veta o monotónnej konvergencii: Ak $\xi_n \nearrow \xi, \xi_n$ sú integrovateľné a $\lim_{n\to\infty} E(\xi_n) < \infty$, tak ξ je integrovateľná a

$$E(\xi) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n).$$

Iná verzia pre nekonečné rady. Ak $\xi_n \geq 0$ sú integrovateľné a $\Sigma_{n=1}^\infty E(\xi_n) < \infty$, tak

$$E(\Sigma_{n=1}^\infty \xi_n) = \Sigma_{n=1}^\infty E(\xi_n).$$

4. Transformácia integrálu

Pravda, najbežnejšie pravidlá pre integrovanie sú v euklidovskom priestore. My sme uviedli strednú hodnotu vzhľadom na danú σ-algebru $\mathcal{S}$ podmnožín množiny Ω a danú pravdepodobnosť $P : \mathcal{S} \to [0, 1]$. V množine R máme σ-algebru $\mathcal{B}(R)$ a na nej (vzhľadom na náhodnú veličinu ξ s distribučnou funkciou F) pravdepodobnosť $\lambda_F : \mathcal{B}(R) \to [0, 1]$.

Vezmeme najprv zloženú funkciu $g \circ \xi$, kde $g : R \to R$. Totiž ak $g(x) = x$, dostaneme $g \circ \xi = \xi$, teda

$$E(g \circ \xi) = E(\xi).$$

Iný užitočný príklad je funkcia $g(x) = (x - E(\xi))^2$, čo vedie k disperzii

$$E(g \circ \xi) = E((\xi - E(\xi))^2) = D(\xi).$$

Jednou cestou môžeme dostať transformačný vzorec pre širokú triedu funkcií $g : R \to R$.

Definícia 4.1. Funkcia $g : R \to R$ sa volá borelovská, ak

$$A \in \mathcal{B}(R) \Longrightarrow g^{-1}(A) \in \mathcal{B}(R).$$

Príklad 4.1. Každá spojitá funkcia je borelovská. Totiž, ľahko sa dokáže, že $\mathcal{B}(R) = \sigma(\mathcal{O})$, kde $\mathcal{O}$ je systém všetkých otvorených intervalov. Nech g je spojitá a

$$\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{B}(R); g^{-1}(A) \in \mathcal{B}(R)\}.$$

Potom $\mathcal{K} \supset \mathcal{O}, \mathcal{K}$ je σ-algebra, teda $\mathcal{K} \supset \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(R)$.

Veta 4.1. Ak $\xi : \Omega \to R$ je náhodná veličina, $g : R \to R$ je borelovská funkcia. Potom $g \circ \xi : \Omega \to R$ je integrovateľná podľa P práve vtedy, keď $g : R \to R$ je integrovateľná podľa λ_F. Vtedy platí

$$\int_\Omega g \circ \xi dP = \int_R g d\lambda_F.$$

Príklad 4.2. Ak $g(x) = x$, tak $g \circ \xi = \xi$, teda

$$E(\xi) = \int_\Omega g \circ \xi dP = \int_R g d\lambda_F = \int_{-\infty}^{\infty} x d\lambda_F(x).$$

Príklad 4.3. Ak $g(x) = (x - E(\xi))^2$, tak $g \circ \xi = (\xi - E(\xi))^2$, teda

$$D(\xi) = E((\xi - E(\xi))^2) = E(g \circ \xi) =$$
$$= \int_R g(x) d\lambda_F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\xi))^2 d\lambda_F(x).$$

Dôkaz vety 4.1. Nech g je jednoduchá $g = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}, \alpha_i \in R, A_i \in \mathcal{B}(R), A_i$ disjunktné. Potom

$$g(\xi(\omega)) = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i \chi_{\xi^{-1}(A_i)},$$

teda

$$\int_\Omega g \circ \xi dP = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i P(\xi^{-1}(A_i)) = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i \lambda_F(A_i) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) d\lambda_F(x).$$

Ak $g \geq 0, g_n$ jednoduché, $g_n \nearrow g$, tak $g_n \circ \xi \nearrow g \circ \xi$, teda

$$\int_\Omega g \circ \xi dP = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega g_n \circ \xi dP = \lim_{n \to \infty} \int_R g_n d\lambda_F = \int_R g d\lambda_F.$$

Konečne vo všeobecnom prípade

$$g = g^+ - g^-,$$

teda

$$g \circ \xi = g^+ \circ \xi - g^- \circ \xi,$$
$$\int_\Omega g \circ \xi dP = \int_\Omega g^+ \circ \xi dP - \int_\Omega g^- \circ \xi dP =$$
$$= \int_R g^+ d\lambda_F - \int_R g^- d\lambda_F = \int_R g d\lambda_F.$$

Zostáva nám odvodiť si spôsob výpočtu strednej hodnoty tak, ako sa realizuje v bežných prípadoch tzv. diskrétnych a spojitých náhodsných veličín.

Veta 4.2. Nech $\xi : \Omega \to R$ je náhodná veličina nadobúdajúca hodnoty $x_1, ..., x_n$ s pravdepodobnosťami $p_1, ..., p_n$. Potom

$$E(g \circ \xi) = \Sigma_{i=1}^n g(x_i) p_i.$$

Dôkaz. Nech $A = \{x_1, ..., x_n\}$. Pretože $\lambda_F(R - A) = 0$, platí

$$E(g \circ \xi) = \int_R g d\lambda_F = \int_R \chi_A g d\lambda_F =$$

$$= \Sigma_{i=1}^n \chi_{\{x_i\}}(x) g(x) d\lambda_F(\{x_i\}) = \Sigma_{i=1}^n g(x_i) p_i.$$

Veta 4.3. Nech $\xi : \Omega \to R$ je náhodná veličina s hustotou f, t.j.

$$P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, x \in R.$$

Potom

$$E(g \circ \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

Dôkaz. Nech $g = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$. Potom

$$E(g \circ \xi) = \int_R g d\lambda_F = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i \lambda_F(A_i) =$$

$$= \Sigma_{i=1}^n \alpha_i \int_R \chi_{A_i}(x) f(x) dx =$$

$$= \int_R \Sigma_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x) f(x) dx = \int_R g(x) f(x) dx.$$

Ak g_n sú nezáporné jednoduché, $g_n \nearrow g$, potom aj $g_n f \nearrow gf$, teda

$$\int_R g(x) f(x) dx = \lim_{n \to \infty} \int_R g_n(x) f(x) dx =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_R g_n d\lambda_F = \int_R g d\lambda_F = E(g \circ \xi).$$

Konečne pre ľubovoľné g

$$E(g \circ \xi) = E(g^+ \circ \xi) - E(g^- \circ \xi) =$$

$$= \int_R g^+(x) f(x) dx - \int_R g^-(x) f(x) dx = \int_R g(x) f(x) dx.$$

Takže skutočne máme v diskrétnom prípade napr.

$$E(\xi) = \Sigma_{i=1}^n x_i p_i, D(\xi) = \Sigma_{i=1}^n (x_i - E(\xi))^2 p_i$$

a v spojitom

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\xi))^2 f(x) dx.$$

Príklad 4.4. Nech $x_i = i, p_i = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$ $(i = 1, 2, ...,)$. Potom

$$E(\xi) = \Sigma_{i=1}^{\infty} i e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda}\Sigma_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda.$$

Príklad 4.5. Nech $f(x) = 0$, ak $x \leq 0, f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ak $x > 0$. Potom

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = [x\lambda\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1.\lambda\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}dx =$$

$$= [\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Pravdaže, tu sme pracovali so spočítateľnýnm priestorom namiesto s konečným, ale z matematickej stránky ide o prirodzené zvošeobecnenie. Z praktickej stránky máme navyše vhodný príklad na použitie.

V prípade disperzie je užitočné umocniť dvojčlen $(\xi - E(\xi))^2$, teda

$$D(\xi) = E(\xi^2 - 2\xi E(\xi) + (E(\xi))^2) =$$

$$= E(\xi^2) - 2E(\xi)E(\xi) + E((E(\xi))^2) = E(\xi^2) - E((\xi))^2.$$

5. Nezávislosť

Klasickým príkladom je nezávislé opakovanie pokusov. Napr. keď dvakrát hádžeme kockou a A znamená, že pri prvom hode padne nepárne číslo a B znamená že pri druhom padne šestka. Dvojnásobný hod môžeme opísať pomocou všetkých usporiadaných dvojíc čísel 1, 2, ..., 6,

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(1,6),...,(6,6)\}.$$

Potom

$$A = \{(1,1),(1,2),...,(1,6),(3,1),...,(3,6),(5,1),...,(5,6)\},$$

$$B = \{(1,6),(2,6),...,(6,6)\},$$

$$A \cap B = \{(1,6),(3,6),(5,6)\},$$

teda

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{3.6}{6.6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6.6} = \frac{1}{2.6} = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} =$$

$$= P(A).P(B).$$

To vedie napr. k iste dobre známemu vzorcu

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Tu je P_{nk} pravdepodobnosť toho, že pri n-násobnom nezávislom opakovaní nejakého pokusu, daný jav, ktorého pravdepodobnosť je p, nastane práve k-krát.

Definícia 5.1. Náhodné premenné ξ, η sú nezávislé, ak pre ľubovoľné $A, B \in \mathcal{B}(R)$ platí

$$P(\xi^{-1}(A) \cap \eta^{-1}(B)) = P(\xi^{-1}(A)).P(\eta^{-1}(B)).$$

Veta 5.1. Náhodné premenné ξ, η sú nezávislé práve vtedy, ak

$$P(\xi^{-1}((-\infty, x)) \cap \eta^{-1}((-\infty, y))) = P(\xi^{-1}((-\infty, x))).P(\eta^{-1}((-\infty, y)))$$

pre každé $x, y \in R$.

Dôkaz. Ak ξ, η sú nezávislé a $x, y \in R$, stačí vziať $A = (-\infty, x), B = (-\infty, y)$. Obrátene, nech platí rovnosť uvedená vo vete. Vezmime $(-\infty, y)$ pevne a uvažujme systém

$$\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{B}(R); P(\xi^{-1}(A) \cap \eta^{-1}((-\infty, y))) = P(\xi^{-1}(A)).P(\eta^{-1}((-\infty, y)))\}.$$

Potom je systém $\mathcal{K}$ monotónny a obsahuje systém $\mathcal{J}$, teda

$$P(\xi^{-1}(A) \cap \eta^{-1}((-\infty, y)) = P(\xi^{-1}(A)).P(\eta^{-1}((-\infty, y))$$

pre všetky $A \in \mathcal{B}(R)$. Položme teraz pre pevné $A \in \mathcal{B}(R)$

$$\mathcal{L} = \{B \in \mathcal{B}(R); P(\xi^{-1}(A) \cap \eta^{-1}(B)) = P(\xi^{-1}(A)).P(\eta^{-1}(B))\}.$$

Podľa predošlého $\mathcal{L} \supset \mathcal{J}$. Keďže $\mathcal{L}$ je monotónny, máme $\mathcal{L} \supset \mathcal{M}(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(R)$, teda rovnosť z definície 5.1 platí pre všetky $A, B \in \mathcal{B}(R)$.

Veta 5.2. Ak ξ, η sú nezávislé a integrovateľné, tak $\xi\eta$ je integrovateľná a

$$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta).$$

Dôkaz. Nech ξ, η sú jednoduché,

$$\xi = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}, \eta = \Sigma_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j}.$$

Potom

$$\xi\eta = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \chi_{A_i \cap B_j},$$

teda

$$E(\xi\eta) = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^m \alpha_i \beta_j P(A_i \cap B_j) =$$
$$= \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^m \alpha_i \beta_j P(A_i) P(B_j) =$$
$$= (\Sigma_{i=1}^n \alpha_i P(A_i))(\Sigma_{j=1}^m \beta_j P(B_j)) = E(\xi)E(\eta).$$

Ak ξ, η sú nezáporné, vezmeme $0 \le \xi_n \nearrow \xi, 0 \le \eta_n \nearrow \eta, \xi_n, \eta_n$ jednoduché nezávislé (veta 3.1). Potom $\xi_n \eta_n \nearrow \xi\eta$, teda

$$E(\xi\eta) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n \eta_n) = \lim_{n\to\infty} E(\xi_n) E(\eta_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} E(\xi_n) \lim_{n\to\infty} E(\eta_n) = E(\xi)E(\eta).$$

Vo všeobecnosti $\xi = \xi^+ - \xi^-, \eta = \eta^+ - \eta^-$. Funkcie ξ^+, ξ^- na jednej strane, resp. $\eta^+\eta^-$ na strane druhej, sú po pároch nezávislé. Totiž

$$(\xi^+)^{-1}(A) = \xi^{-1}(A \cap [0,\infty)),$$
$$(\xi^-)^{-1}(A) = \xi^{-1}((-A) \cap [0,\infty))$$

a podobne η^+, η^-. Preto

$$E(\xi\eta) = E((\xi^+ - \xi^-)(\eta^+ - \eta^-)) =$$
$$= E(\xi^+\eta^+) - E(\xi^-\eta^+) - E(\xi^-\eta^+) + E(\xi^-\eta^-) =$$
$$= E(\xi^+)E(\eta^+) - E(\xi^-)E(\eta^+) - E(\xi^-)E(\eta^+) + E(\xi^)E(-\eta^-) =$$
$$= (E(\xi^+) - E(\xi^-))(E(\eta^+) - E(\eta^-)).$$

Veta 5.3. Nech ξ, η sú nezávislé s integrovateľným štvorcom. Potom je taká aj $\xi + \eta$ a

$$D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta).$$

Dôkaz. Máme

$$E((\xi + \eta)^2) = E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) =$$
$$= E(\xi^2) + 2E(\xi)E(\eta) + E(\eta^2),$$
$$(E(\xi + \eta))^2 = (E(\xi) + E(\eta))^2 =$$
$$= (E(\xi))^2 + 2E(\xi)E(\eta) + (E(\eta))^2.$$

Preto

$$E((\xi + \eta)^2) - (E(\xi + \eta))^2 =$$
$$= E(\xi^2) - (E(\xi))^2 + E(\eta^2) - (E(\eta))^2 =$$
$$= D(\xi) + D(\eta).$$

V znení vety 5.3 sme sa nezmienili o existencii strednej hodnoty $E(\xi_i)$. Tá vyplýva z existencie $E(\xi_i^2)$. Máme totiž

$$0 \leq (|\xi| - 1)^2 = \xi_i^2 - 2|\xi| + 1,$$

$$|\xi| \leq \frac{1}{2}(\xi_i^2 + 1).$$

Keďže $\frac{1}{2}(\xi^2 + 1)$ je integrovateľná, je integrovateľná aj $|\xi|$.

6. Odhad momentov

Môže sa stať, že meriame nejakú veličinu. Urobíme to niekoľkokrát a potom vypočítame aritmetický priemer tých meraní. Matematický model je v konečnej postupnosti nezávislých náhodných veličín s tým istým rozdelením pravdepodobnosti.

Veta 6.1. Nech $\xi_1, ..., \xi_n$ sú náhodné veličiny s tou istou strednou hodnotnou $a = E(\xi_i), i = 1, 2, ..., n..$ Nech $\bar{\xi} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n \xi_i$. Potom

$$E(\bar{\xi}) = a.$$

Dôkaz. Platí (pozri str. 15)

$$E(\bar{\xi}) = E(\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n \xi_i) = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n E(\xi_i) =$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n a = \frac{1}{n}.na = a.$$

Podobne môžeme odhadnúť disperziu.

Veta 6.2. Nech $\xi_1, ..., \xi_n$ sú nezávislé náhodné veličiny so strednou hodnotou $E(\xi_i) = a$ a disperziou $D(\xi_i) = \sigma^2 (i = i, 2, ..., n)$. Potom

$$E(\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n (\xi_i - a)^2) = \sigma^2.$$

Dôkaz. Platí

$$E(\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n (\xi_i - a)^2) = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n D(\xi_i) =$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n \sigma^2 = \sigma^2$$

Pravda pri odhade čísla σ^2 strednú hodnotu a nepoznáme. Preto namiesto nej používame aritmetický priemer

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n \xi_i,$$

teda hľadáme

$$E(\Sigma_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2) =$$

$$= E(\Sigma_{i=1}^n \xi_i^2 - 2\bar{\xi}\Sigma_{i=1}^n \xi_i + n\bar{\xi}^2) =$$
$$= E((\Sigma_{i=1}^n \xi_i^2) - n\bar{\xi}^2) = \Sigma_{i=1}^n E(\xi_i^2) - nE(\bar{\xi}^2) =$$
$$= n(\sigma^2 + a^2) - nE(\bar{\xi}^2).$$

Zostáva nám vypočítať

$$E(\bar{\xi}^2) = E((\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n \xi_i)^2) =$$
$$= \frac{1}{n^2}E(\Sigma_{i=1}^n \xi_i^2 + \Sigma_{i\neq j}\xi_i\xi_j) =$$
$$= \frac{1}{n^2}E(\Sigma_{i=1}^n \xi_i^2) + \frac{1}{n^2}\Sigma_{i\neq j}E(\xi_i)E(\xi_j) =$$
$$= \frac{1}{n^2}n(\sigma^2 + a^2) + \frac{1}{n^2}n(n-1)a^2 =$$
$$= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{a^2}{n} + a^2 - \frac{a^2}{n} =$$
$$= \frac{\sigma^2}{n} + a^2.$$

Preto

$$E(\Sigma_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2) = n\sigma^2 + na^2 - n\frac{\sigma^2}{n} - na^2 =$$
$$= n\sigma^2 - \sigma^2 = \sigma^2(n-1).$$

Dokázali sme teda nasledujúcu vetu:

Veta 6.3 Nech $\xi_1, ..., \xi_n$ sú nezávislé náhodné veličiny s disperziou $D(\xi_i) = \sigma^2 (i = 1, ..., n)$. Potom

$$E(\frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2) = \sigma^2.$$

7. Intervalový odhad.

Videli sme, že aritmetický priemer $\bar{\xi}$ nameraných hodnôt je dobrý odhad strednej hodnoty a. Pravda, merané hodnoty sa sústreďujú okolo nej, bližšie k nej častejšie, vzdialenejšie od nej zriedkavejšie. Teoretickým modelom je veta 7.1. Spomenutú zákonitosť opisuje tzv. Gaussova krivka tradične uvádzaná v tvare

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

K uvedenej funkcii sa nedá nájsť primitívna funkcia v tvare elementárnej funkcie. Vieme však (Dodatok 1), že

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Definícia 7.1. Náhodná premenná ξ má normálne rozdelenie s parametrami $a \in R, \sigma \in (0, \infty), (\xi \sim N(a, \sigma))$, ak má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ak označíme

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}},$$

tak

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-a}{\sigma}).$$

Propozícia 7.1. Ak ξ má normálne rozdelenie s parametrami $a, \sigma(\xi \sim N(a, \sigma))$, tak

$$E(\xi) = a, D(\xi) = \sigma^2.$$

Dôkaz. Myšlienku predvedieme na prípade $a = 0,^2 = 1$. Vo všeobecnom prípade je dôkaz analogický. Tak

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Keďže funkcia $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ je nepárna a integrovateľná. máme

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

Ďalej, pomocou metódy per partes dostávame

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x.(xe^{-\frac{x^2}{2}} dx) = [x(-e^{-\frac{x^2}{2}})]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= 0 + \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi},$$

teda

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-0)^2 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = 1.$$

Z praktických dôvodov je vhodné pracovať s rozdelením $N(0,1)$. Preto si používaný aritmetický priemer znormujeme. Veď vieme, že

$$E(\bar{\xi}) = a, D(\bar{\xi}) = \sigma^2,$$

pravda, za predpokladu, že $\xi_1, ..., \xi_n$ sú nezávislé a integrovateľné, $E(\xi_i) = a, D(\xi_i) = \sigma^2 (i = 1, ..., n)$.

Lemma 7.1. Ak $E(\xi) = a, D(\xi) = \sigma^2, \sigma > 0$ a $\eta = \frac{1}{\sigma}(\xi - a)$, tak $E(\eta) = 0, D(\eta) = 1$.

Dôkaz. Máme

$$E(\eta) = \frac{1}{\sigma} E(\xi - a) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}(E(\xi) - a) = \frac{1}{\sigma}(a - a) = 0,$$

$$D(\eta) = E(\frac{1}{\sigma^2}(\xi - a)^2) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} E((\xi - a)^2) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1.$$

Dôsledok. Ak $\xi_1, ..., \xi_n$ sú nezávislé s tým istým rozdelením, $E(\xi) = a, D(\xi) = \sigma^2, \sigma > 0$, tak

$$E(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\Sigma_{i=1}^n \xi_i - na)) = E(\frac{\bar{\xi} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 0,$$

$$D(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\Sigma_{i=1}^n \xi_i - na)) = D(\frac{\bar{\xi} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 1.$$

Ohlásená limitná veta (jedna z možností) má teda nasledujúcu formu.

Veta 7.1 (Centrálna limitná veta). Nech $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených náhodných premenných so strednou hodnotou $E(\xi_n) = a$) a disperziou $D(\xi) = \sigma^2, \sigma > 0 (n = 1, 2, ...)$. Potom pre každé $x \in R$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega; \frac{\Sigma_{i=1}^{n}\xi_i(\omega) - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Dôkaz je uvedený v kapitole 8.

Príklad 7.1. Majme n nezávislých meraní $\xi_1, ...\xi_n, \delta > 0$. Aká je pravdepodobnosť toho, že $|\bar{\xi} - a| < \delta$?

Máme

$$P(|\bar{\xi} - a| < \delta) = P(\bar{\xi} - a < \delta) - P(\bar{\xi} - a < -\delta) =$$

$$= P(\bar{\xi} - a < \frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}}) - P(\bar{\xi} - a < -\frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}}),$$

kde $\frac{\varepsilon\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$, teda $\varepsilon = \frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}$. Preto

$$P(|\bar{\xi} - a| < \delta) \doteq \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(t) dt = 2 \int_{0}^{\varepsilon} \varphi(t) dt.$$

Ak označíme $\Phi(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) dt$, máme

$$P(|\bar{\xi} - a| < \delta) \doteq 2\Phi(\varepsilon) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}) = \alpha.$$

Z vety 7.1 vyplýva klasický výsledok spojený s menami Movrea a Laplacea. Ide o náhodnú premennú s binomickým rozdelením k_n, ktorá má hodnoty

$$0, 1, ..., n$$

s pravdepodobnosťami

$$p_k = P(\{\omega; k_n(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}.$$

Veta 7.2. Nech k_n je náhodná premenná s binomickým rozdelením s parametrami n, p. Potom pre všetky $x \in R$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega; \frac{k_n(\omega) - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Dôkaz. Položme $\xi_n = \chi_{A_n}$, kde A_n sú nezávislé a $P(A_n) = p$ $(n = 1, 2, ...)$. Potom

$$E(\xi_n) = 1.p + 0.(1-p) = p = a,$$

$$D(\xi_n) = (1-p)^2.p + (0-p)^2.(1-p) = p(1-p),$$

teda $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$. Navyše

$$\Sigma_{i=1}^{n} \xi_i = k_n.$$

Preto

$$\frac{k_n(\omega) - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

8. Dôkaz centrálnej limitnej vety

Jednou z možných techník dôkazu je technika tzv. charakteristických funkcií. Je založená na Taylorovom rozvoji

$$f(x) \sim f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

Dobre známe sú rovnosti

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...,$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...,$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

Niektoré vzťahy platia aj pre komplexné čísla, teda

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + ... =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...) =$$

$$= cosx + isinx.$$

Definícia 8.1. Ak ξ je náhodná premenná, tak jej charakteristická funkcia $\psi : R \to C$ je definovaná vzťahom

$$\psi(t) = E(e^{it\xi}) = E(cost\xi) + iE(sint\xi).$$

za predpokladu, že tá stredná hodnota existuje.

Príklad 8.1. Nech ξ má normálne rozdelenie $N(0,1)$. Potom $\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Podľa definície a vety 4.3

$$\psi(t) = E(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Ale

$$itx - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - 2itx) =$$

$$= -\frac{1}{2}[(x-it)^2 - (it)^2] = -\frac{1}{2}(x-it)^2 - \frac{t^2}{2}.$$

Preto

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}.e^{-\frac{t^2}{2}} dx =$$

$$= e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

V našich úvahách sú dôležité charakterizácie exponenciálnej funkcie, napr.

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Vo všeobecnejšom tvare hovorí o tom nasledujúca lema, ktorú budeme potrebovať.

Lema 8.1. Ak $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, tak

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z_n}{n})^n = e^z.$$

Dôkaz. Použijeme Taylorovu vetu na funkciu $f(x) = \ln(1+x)$, teda $f'(x) = \frac{1}{1+x}, f"(x) = -(1+x)^{-2}$. Ak položíme $a = 0$, dostaneme

$$\ln(1+x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f"(c)}{2!}x^2 =$$

$$= 0 + x - \frac{1}{2(1+c)^2}x^2$$

kde c leží medzi 0 a x. Preto

$$\ln(1 + \frac{z_n}{n}) = \frac{z_n}{n} - \frac{{z_n}^2}{2n^2(1+c)^2}.$$

Vezmime n také, aby $\frac{|z_n|}{n} < q < 1$. Potom

$$\ln(1 + \frac{z_n}{n})^n = z_n - \frac{{z_n}^2}{2n(1+c)^2}.$$

Ak označíme $-\frac{{z_n}^2}{2n^2(1+c)^2} = R_n$, tak

$$|nR_n| \leq \frac{1}{2n},$$

teda $\lim_{n\to\infty} nR_n = 0$. Preto

$$\lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{z_n}{n})^n = \lim_{n\to\infty} z_n = z,$$

teda

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{z_n}{n})^n = e^z.$$

Veta 8.1. Nech $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných, $E(\xi_n) = a, D(\xi_n) = \sigma^2, \sigma > 0, \psi_n$ je charakteristická funkcia náhodnej premennej

$$\frac{\Sigma_{j=1}^n \xi_j - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

$(n = 1, 2, ...)$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

pre každé $t \in R$.

Dôkaz. Označme

$$\eta_j = \frac{\xi_j - a}{\sigma}$$

$j = 1, 2, ...$ Všetky η_j majú rovnakú charakteristickú funkciu

$$g(t) = E(e^{it\eta_j}), j = 1, 2, ...$$

Nech ψ_n je charakteristická funkcia náhodnej premennej

$$\frac{\Sigma_{j=1}^n \xi_j - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

Keďže η_j sú nezávislé, platí

$$\psi_n(\sqrt{n}t) = E(e^{it\Sigma_{j=1}^n \eta_j}) =$$

$$= E(\Pi_{j=1}^n e^{it\eta_j}) = \Pi_{j=1}^n (g(t)) = g(t)^n,$$

teda
$$\psi_n(t) = g(\frac{t}{\sqrt{n}})^n.$$
Ale, ak F je distribučná funkcia náhodnej premennej η_j, tak
$$g(t) = E(e^{it\eta_j}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x),$$
$$g'(t) = i \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx} dF(x),$$
$$g"(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{itx} dF(x),$$
teda
$$g(0) = E(1) = 1,$$
$$g'(0) = iE(\eta) = i\frac{1}{\sigma} E(\xi - a) = 0,$$
$$g"(c) = - \int_{\infty}^{\infty} x^2 e^{icx} dF(x).$$
Podľa Taylorovej vety
$$g(t) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} t + \frac{g"(c)}{2!} t^2 =$$
$$= 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{icx} dF(x)$$
$$= 1 - \frac{t^2}{2} + \varrho(t).$$
Pritom
$$\frac{\varrho(t)}{t^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{icx} dF(x),$$
kde
$$\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{icx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) =$$
$$= E(\eta^2) = \frac{1}{\sigma^2} E(\xi^2) = 1.$$
Preto
$$\lim_{t \to 0} \frac{\varrho(t)}{t^2} = 0.$$

Máme

$$\psi_n(t) = g(\frac{t}{\sqrt{n}})^n =$$

$$= (1 - \frac{t^2}{2n} + \varrho(\frac{t}{\sqrt{n}}))^n =$$

$$= (1 + \frac{-\frac{t^2}{2} + n\varrho(\frac{t}{\sqrt{n}})}{n})^n = (1 + \frac{z_n}{n})^n.$$

Ale

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(-\frac{t^2}{2} + t^2\frac{\varrho(\frac{t}{\sqrt{n}})}{\frac{t^2}{n}}) =$$

$$= -\frac{t^2}{2} + t^2 \lim_{u\to 0}\frac{\varrho(u)}{u^2} = -\frac{t^2}{2}.$$

Preto podľa lemy 8.1

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z_n}{n})^n = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

V Dodatku 2 je dokázané, že ak F_n je odpovedajúca distribučná funkcia, tak

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt,$$

kde

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Preto z vety 8.1 vyplýva veta 7.1.

9. Zákon veľkých čísel

Centrálna limitná veta nám dáva cenný nástroj pre odhad strednej hodnoty pomocou aritmetického priemeru. Keďže však máme k dispozícii abstraktný kolmogorovovský aparát, bolo by hriechom nespomenúť dve iné, všeobecne známe formulácie.

Veta 9.1 (Čebyševova nerovnosť). Nech ξ je náhodná veličina, ktorá má disperziu $D(\xi)$. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ platí

$$P(\{\omega; |\xi(\omega) - E(\xi)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Dôkaz. Položme $B = \{\omega; |\xi(\omega) - E(\xi)| \geq \varepsilon\}$. Potom

$$D(\xi) = \int_\Omega (\xi - E(\xi))^2 dP \geq \int_B (\xi - E(\xi))^2 dP \geq \varepsilon^2 P(B).$$

Veta 9.2 (pravidlo 3σ). Nech ξ je náhodná veličina s kladnou disperziou $D(\xi) = \sigma^2, \sigma > 0$. Potom

$$P(\{\omega; |\xi(\omega) - E(\xi)| \geq 3\sigma\}) \leq \frac{1}{9}.$$

Dôkaz. Vo vete 9.1 stačí položiť $\varepsilon = 3\sigma$.

Veta 9.3 (slabý zákon veľkých čísel). Nech $(\xi_n)_{n=1}^\infty$ je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených náhodných veličín majúcich disperziu. Potom pre každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega; |\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n \xi_i - E(\xi_1)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Dôkaz. Vo vete 9.1 treba položiť $\xi = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n \xi_i$. Potom

$$E(\xi) = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n E(\xi_i) = \frac{1}{n} n E(\xi_1) = E(\xi_1),$$

$$D(\xi) = \frac{1}{n^2}\Sigma_{i=1}^n D(\xi_i) = \frac{1}{n^2} n D(\xi_1) = \frac{1}{n} D(\xi_1).$$

Preto

$$P(\{\omega; |\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n \xi_i - E(\xi_1)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n} D(\xi_1).$$

Veta 9.4 (Bernoulliho zákon veľkých čísel). Ak k_n je náhodná premenná s binomickým rozdelením s parametrami $n \in N, p \in [0,1], (n = 1, 2, ...)$, tak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n \to \infty} P(\{\omega; |\frac{k_n(\omega)}{n} - p| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Dôkaz. Vo vete 9.3. položme $\xi_i = \chi_{A_i}$, kde $A_1, A_2, ...$ sú nezávislé udalosti, $P(A_i) = p, (i = 1, 2, ...)$.

10. Podmienená pravdepodobnosť

Nech priestor Ω má n prvkov, podmnožina A množiny Ω má m prvkov, teda $P(A) = m/n$. Z tých m prvkov je k takých, že v nich nastane aj B, teda

$$P(B|A) = \frac{k}{m} = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Preto

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A).$$

Ak sú A, B nezávislé, tak $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, pravdepodobnosť prieniku sa rovná súčinu pravdepodobností. Vo všeobecnosti pravdepodobnosť množiny B závisí od podmienky A. Predpokladajme, že podmienky A sa menia. Dané sú rozkladom Γ množiny Ω

$$\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_n\},$$

kde $P(A_i) > 0$ $(i = 1, 2, ..., n), A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j), \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Rozkladu Γ zodpovedá σ-algebra $\mathcal{S}_0 = \sigma(\Gamma)$ ním vytvorená. Ak nastane A_i, tak podmienená pravdepodobnosť javu B je $P(B|A_i)$. Môžeme teda definovať $P(B|\Gamma) = P(B|\mathcal{S}_0)$ ako reálnu funkciu na Ω, ktorá má na kažom prvku ω z množiny A_i hodnotu $P(B|A_i)$. To môžeme zapísať ako

$$P(B|\mathcal{S}_0)(\omega) = \Sigma_{i=1}^n P(B|A_i)\chi_{A_i}(\omega).$$

Táto funkcia má dve vlastnosti:

1. Funkcia $P(B|\mathcal{S}_0)$ je $\mathcal{S}_0$-merateľná.
2. Pre ľubovoľné $E \in \mathcal{S}_0$ platí

$$\int_E P(B|\mathcal{S}_0)dP = P(B \cap E).$$

Skutočne, ak $E \in \mathcal{S}_0$, tak $E = \bigcup_{i\in\alpha} A_i$, teda

$$\int_E P(B|\mathcal{S}_0)dP = \int_\Omega \chi_E \Sigma_{i=1}^n P(B|A_i)\chi_{A_i}dP =$$

$$= \int_\Omega \Sigma_{i=1}^n P(B|A_i)\chi_{E\cap A_i}dP = \Sigma_{i\in\alpha} \int_\Omega P(B|A_i)\chi_{E\cap A_i}dP =$$

$$= \Sigma_{i\in\alpha} P(B|A_i)P(E \cap A_i) = \Sigma_{i\in\alpha} \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} P(A_i) =$$

$= \Sigma_{i\in\alpha} P(B \cap A_i) = P(B \cap \bigcup_{i\in\alpha} A_i) = P(B \cap E)$.

Ale uvedenými dvoma vlastnosťami môžeme definovať podmienenú pravdepodobnosť javu vzhľadom na ľubovoľnú σ-algebru $\mathcal{S}_0$.

Veta 10.1. Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ je σ-algebra, $B \in \mathcal{S}$. Potom existuje taká $\mathcal{S}_0$-merateľná funkcia $f : \Omega \to [0,1]$, že

$$\int_E f dP = P(E \cap B)$$

pre ľubovoľnú množinu $E \in \mathcal{S}_0$.

Dôkaz. Definujme na $\mathcal{S}_0$ dve miery μ, ν predpisom

$$\mu(E) = P(E), \nu(E) = P(E \cap B).$$

Potom ν je absolútne spojitá podľa μ ($\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$). Preto podľa Radonovej - Nikodymovej vety (Dodatok 3) existuje taká $\mathcal{S}_0$-merateľná funkcia f, že

$$P(E \cap B) = \nu(E) = \int_E f d\mu = \int_E f dP$$

pre všetky $E \in \mathcal{S}_0$.

Pravdaže, funkcia f nie je určená jednoznačne, ale "skoro"jednoznačne.

Definícia 10.1. Nech f, g sú merateľné funkcie na priestore $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$. Funkcie f, g sa rovnajú $\mu-$skoro všade, ak

$$\mu(\{\omega \in \Omega; f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0.$$

Veta 10.2. Nech $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ pre všetky $E \in \mathcal{S}_0$. Potom μ-skoro všade $f = g$.

Dôkaz. Položme $h = f - g$. Potom h je $\mathcal{S}_0$-merateľná a $\int_E h d\mu = 0$ pre všetky $E \in \mathcal{S}_0$. Ak je h nezáporná, jednoduchá, tak $h = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}, A_i \in \mathcal{S}_0$ $(i = 1, 2, ...), A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$. Potom

$$0 = \int_E h d\mu = \Sigma_{i=1}^n \int_\Omega \alpha_i \chi_{A_i \cap E} d\mu = \Sigma_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E),$$

teda $\alpha_i = 0$, alebo $\mu(A_i \cap E) = 0$. Preto $h = 0$ skoro všade.

Ak je h nezáporná $\mathcal{S}_0$-merateľná, vezmeme jednoduché $h_n, 0 \leq h_n \nearrow h$. Keďže $0 \leq \int_E h_n d\mu \leq \int_E h d\mu = 0$, sú h_n skoro všade nulové a preto aj h.

Konečne pre ľubovoľnú $\mathcal{S}_0$-merateľnú h, množiny $E^+ = \{\omega; h(\omega) > 0\}, E^-$ $= \{\omega; h(\omega) < 0\}$ sú $\mathcal{S}_0$-merateľné, $\int_{E^+} hd\mu = 0, \int_{E^-} hd\mu = 0$, teda $h = f - g$ je μ-nulová skoro všade na E^+ aj E^- a preto aj na E. To ale znamená, že $\mu-$skoro všade $f = g$.

Definícia 10.2. Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ je σ-algebra, $B \in \mathcal{S}$. Potom $P(B|\mathcal{S}_0) : \Omega \to R$ je ľubovoľná taká $\mathcal{S}_0$-merateľná funkcia, že

$$\int_E P(B|\mathcal{S}_0)dP = P(E \cap B)$$

pre všetky $E \in \mathcal{S}_O$.

Veta 10.3. Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ je σ-algebra. Potom

1. P-skoro všade $P(\emptyset|\mathcal{S}_0) = 0, P(\Omega|\mathcal{S}_0) = 1$.
2. P-skoro všade $0 \leq P(A|\mathcal{S}_0) \leq 1, A \in \mathcal{S}$.
3. Ak $A_n \in \mathcal{S}(n = 1, 2, ...), A_i \cap A_j = \emptyset(i \neq j)$, tak P-skoro všade

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|\mathcal{S}_0) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{S}_0).$$

Dôkaz. Prvá vlastnosť vyplýva z toho, že $\int_E 1dP = P(E) = P(E \cap \Omega), \int_E 0dP = 0 = P(E \cap \emptyset)$, teda P-skoro všade $P(\Omega|\mathcal{S}_0) = 1, P(\emptyset|\mathcal{S}_o) = 0$.

Aby sme dokázali druhú vlastnosť, vezmime $E = \{\omega \in \Omega; P(A|\mathcal{S}_0) < 0\}$. Keby $P(E) > 0$, potom by $P(E \cap A) = \int_E P(A|\mathcal{S}_0)dP < 0$, čo nie je možné. Analogicky sa dokáže druhá nerovnosť.

Konečne, nech $A_n \in \mathcal{S}(n = 1, 2, ...), A_i \cap A_j = \emptyset(i \neq j)$. Nech $E \in \mathcal{S}_0$. Potom

$$P(A_n \cap E) = \int_E P(A_n|\mathcal{S}_0)dP.$$

Preto

$$P((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap E) = P(\bigcup_{n-1}^{\infty} (A_n \cap E)) =$$

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap E) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \int_E P(A_n|\mathcal{S}_0)dP =$$

$$= \int_E (\Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n|\mathcal{S}_0))dP.$$

11. Podmienená stredná hodnota

Podobne ako sme zaviedli podmienenú pravdepodobnosť, môžeme zaviesť aj podmienenú strednú hodnotu. Tak ako definícii 10.2 predchádzali existenčné vety 10.1 a 10.2, aj teraz uvedieme existenčnú vetu.

Veta 11.1. Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ je $\sigma-$algebra, $\xi : \Omega \to R$ je integrovateľná náhodná premenná. Potom existuje taká $\mathcal{S}_0$-merateľná funkcia $f : \Omega \to R$, že pre všetky $E \in \mathcal{S}_0$ platí

$$\int_E f dP = \int_E \xi dP.$$

Ak g je iná taká funkcia, tak P-skoro všade $g = f$.

Dôkaz. Definujme na $\mathcal{S}_0$ tri miery $\mu, \nu_1, \nu_2 : \mathcal{S}_0 \to [0, 1]$,

$$\mu(E) = P(E), \nu_1(E) = \int_E \xi^+ dP, \nu_2(E) = \int_E \xi^- dP.$$

Potom ν_1 je absolútne spojitá podľa μ, ν_2 je absolútne spojitá podľa μ. Existujú teda také $\mathcal{S}_0$-merateľné funkcie $f_1, f_2 : \Omega \to R$, že

$$\nu_1(E) = \int_E f_1 d\mu, \nu_2(E) = \int_E f_2 d\mu.$$

Ak položíme $f = f_1 - f_2$, tak pre každé $E \in \mathcal{S}_0$ platí

$$\int_E f dP = \int_E f_1 dP - \int_E f_2 dP = \nu_1(E) - \nu_2(E) =$$

$$= \int_E \xi^+ dP - \int_E \xi^- dP = \int_E \xi dP.$$

Ak zároveň $\int_E g dP = \int_E \xi dP$ pre každé $E \in \mathcal{S}_0$, tak $\int_E g dP = \int_E f dP$ pre každé $E \in \mathcal{S}_0$, teda P-skoro všade $f = g$ podľa vety 10.2.

Definícia 11.1. Nech $(\Omega, \mathcal{S}_0, P)$ je pravdepodobnostný priestor, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ je σ-algebra, $\xi : \Omega \to R$ je integrovateľná náhodná premenná. Potom podmienená stredná hodnota $E(\xi|\mathcal{S}_0) : \Omega \to R$ je taká $\mathcal{S}_0$-merateľná funkcia, že

$$\int_E E(\xi|\mathcal{S}_o) dP = \int_E \xi dP$$

pre všetky $E \in \mathcal{S}_0$.

Veta 11.2. Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ je σ-algebra, ξ je nezáporná, integrovateľná náhodná premenná. Potom

$$E(\xi|\mathcal{S}_0)dP \geq 0$$

P- skoro všade.

Dôkaz. Nech $E = \{\omega; E(\xi|\mathcal{S}_0)(\omega) < 0\}$. Keby $P(E) > 0$, potom by

$$0 \leq \int_E E(\xi|\mathcal{S}_0)dP < 0,$$

čo je spor.

Veta 11.3. Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}, \xi, \eta$ integrovateľné náhodné premenné $\alpha, \beta \in R$. Potom P-skoro všade

$$E(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{S}_0)) = \alpha E(\xi|\mathcal{S}_0) + \beta E(\eta|\mathcal{S}_0).$$

Dôkaz. Keďže pre každé $E \in \mathcal{S}_0$ platí

$$\int_E E(\xi|\mathcal{S}_0)dP = \int_E \xi dP, \int_E E(\eta|\mathcal{S}_0)dP = \int_E \eta dP,$$

pre $E \in \mathcal{S}_0$ platí tiež

$$\int_E (\alpha\xi + \beta\eta)dP = \alpha \int_E \xi dP + \beta \int_E \eta dP =$$

$$= \alpha \int_E E(\xi|\mathcal{S}_0)dP + \beta \int_E E(\eta|\mathcal{S}_0)dP =$$

$$= \int_E (\alpha E(\xi|\mathcal{S}_0) + \beta E(\eta|S_0))dP.$$

Veta 11.4. Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ je σ-algebra, $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ postupnosť integrovateľných náhodných premenných, $\xi_n \searrow 0$. Potom P-skoro všade

$$E(\xi|\mathcal{S}_0) \searrow 0.$$

Dôkaz. Pre $E \in \mathcal{S}_0$ $\chi_E \xi_n \searrow 0$, teda

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_E \xi_n dP = \lim_{n\to\infty} \int_E E(\xi_n|\mathcal{S}_0)dP =$$

$$= \int_E (\lim_{n\to\infty} E(\xi_n|\mathcal{S}_0))dP.$$

Dodatok 1. Laplaceov integrál

Veta. Pre Laplaceov integrál platí $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Dôkaz. Urobíme ho pomocou dvojných integrálov. Nech A je štvorec, $A = [-t, t] \times [-t, t]$. Podľa Fubiniho vety platí

$$\iint_A e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \int_{-t}^{t} dx \int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}.e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Big(\int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\Big)\Big(\int_{-t}^{t} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\Big) =$$

$$= \Big(\int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\Big)^2.$$

Nech B je kruh so stredom v začiatku a polomerom r. Ak použijeme polárne súradnice, dostaneme

$$\iint_B e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r e^{-\frac{\varrho^2}{2}}.\varrho d\varrho = 2\pi\Big[-e^{-\frac{\varrho^2}{2}}\Big]_0^r = 2\pi(1 - e^{-\frac{r^2}{2}}).$$

Ak $B^\sharp$ je kruh opísaný štvorcu A (má teda polomer $t\sqrt{2}$) a B^b je kruh vpísaný do štvorca A (polomer t), tak

$$\iint_{B^b} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \iint_A e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \leq \iint_{B^\sharp} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy,$$

$$2\pi(1 - e^{-\frac{t^2}{2}}) \leq \Big(\int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\Big)^2 \leq 2\pi(1 - e^{-t^2}).$$

Preto

$$\lim_{t\to\infty}\Big(\int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\Big)^2 = 2\pi,$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Dodatok 2. Distribučné a charakteristické funkcie

Cieľom tohto dodatku je dôkaz nasledujúcej vety.

Veta. Nech $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť distribučných funkcií, ψ_n zodpovedajúce charakteristické funkcie, t.j.

$$\psi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x), t \in R.$$

Ak $\lim_{n\to\infty} \psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ pre všetky $t \in R$, tak

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

pre všetky $x \in R$.

Dôkazu vety predošleme tri tvrdenia.

Propozícia 1. Nech $(G_k)_k$ je postupnosť distribučných funkcií. Potom existuje z nej vybraná $(G_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ (označme $G_{k_l} = H_l$) a taká neklesajúca spojitá zľava funkcia $G : R \to [0,1]$, že

$$\lim_{l\to\infty} H_l(x) = G(x)$$

pre všetky $x \in R$.

Dôkaz. Nech $Q = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ množina všetkých racionálnych čísel. Pretože $(G_k(x_1))_{k=1}^{\infty}$ je ohraničená, existuje z nej vybraná konvergentná $(G_k^{(1)}(x_1))_{k=1}^{\infty}$, taká, že existuje $\lim_{k\to\infty} G_k^{(1)}(x_1) = g(x_1)$. Podobne z postupnosti $(G_k^{(1)})_{k=1}^{\infty}$ vyberieme $(G_k^{(2)})_{k=1}^{\infty}$, aby existovala $\lim_{k\to\infty} G_k^1(x_2) = g(x_2)$ Takto dostaneme postupnosť postupností

$$G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, G_3^{(1)}, ...$$
$$G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, G_3^{(2)}, ...$$
$$G_1^{(3)}, G_2^{(3)}, G_3^{(3)}, ...$$
$$...$$

pričom nasledujúca je vybraná z predchádzajúcej a pre každé i existuje

$$\lim_{k\to\infty} G_k^{(i)} = g(x_i).$$

Potom postupnosť $(G_n^{(n)})_{n=1}^\infty$ je vybraná z postupnosti $(G_k)_{k=1}^\infty$ a

$$\lim_{n\to\infty} G_n^{(n)}(x_i) = g(x_i)$$

pre každé i. Položme $H_k = G_k^{(k)}$, teda

$$\lim_{k\to\infty} H_k(x_i) = g(x_i), i = 1, 2, ...$$

Naostatok stačí položiť pre ľubovoľné $x \in R$

$$G(x) = \lim_{u\to x-} \sup\{g(x_i); x_i \leq u\}.$$

Propozícia 2. Nech $(H_k)_{k=1}^\infty$ je postupnosť distribučných funkcií, ψ_k zodpovedajúce charakteristické funkcie, t.j. $\psi_k(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} dH_k(x)$. Nech $\lim_{k\to\infty} \psi_k(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, t \in R, \lim_{k\to\infty} H_k(x) = G(x), x \in R$. Potom G je distribučná funkcia a

$$\int_{-\infty}^\infty e^{itx} dG(x) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Dôkaz. Máme

$$\int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^u \lim_{k\to\infty} \psi_k(t) dt = \int_0^u \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^\infty e^{itx} dH_k(x) dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^\infty [\int_0^u e^{itx} dt] dH_k(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iux} - 1}{ix} dH_k(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iux} - 1}{ix} dG(x) = \int_{-\infty}^\infty [\int_0^u e^{itx} dt] dG(x) =$$

$$= \int_0^u [\int_{-\infty}^\infty e^{itx} dG(x)] dt.$$

Preto

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} dG(x), t \in R.$$

Ak v tejto rovnosti položíme $t = 0$, dostaneme

$$1 = \lambda_G(R),$$

teda G je distribučná funkcia, ktorej charakteristická funkcia je

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Propozícia 3. Nech F, G sú také distribučné funkcie, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x).$$

Potom $F(x) = G(x), x \in R$.

Dôkaz. Najprv uvažujme funkciu ψ v tvare $\psi(x) = \Sigma_{j=1}^{n} c_j e^{ixt_j}$. Zrejme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dG(x).$$

Pretože každá spojitá funkcia f na R nulová mimo nejakého kompaktného intervalu sa dá aproximovať funkciami predošlého typu, máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dG(x).$$

Ale takými funkciami sa zase dajú aproximovať funkcie typu $\chi_{[a,b)}$. Preto

$$\lambda_F([a,b)) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b)} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b)} dG(x) = \lambda_G([a,b)).$$

Napokon

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_F([x-n, x)) = \lim_{n\to\infty} \lambda_G([x-n, x)) = G(x).$$

Dôkaz vety. Nech $(G_k)_{k=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť vybraná z postupnosti $(F_n)_{n=1}^{\infty}$. Potom podľa propozície 1 existuje taká neklesajúca spojitá funkcia $G : R \to [0,1]$ a taká postupnosť $(H_l)_{l=1}^{\infty}$ vybraná z postupnosti $(G_k)_{k=1}^{\infty}$, že

$$G(x) = \lim_{l\to\infty} H_l(x), x \in R.$$

Podľa propozície 2, funkcia G je distribučná a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG(x) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Definujme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Ale aj

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Pretože z rovnosti charakteristických funkcií vyplýva rovnosť funkcií distribučných (propozícia 3), vidíme, že z ľubovoľnej postupnosti $(F_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ vybranej z $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ existuje taká postupnosť $(F_{n_{i_k}})_{k\to\infty}^{\infty}$ vybraná z nej, že

$$\lim_{k\to\infty} F_{n_{i_k}}(x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Z toho ale vyplýva, že

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

pre všetky $x \in R$.

Dodatok 3. Radonova - Nikodymova veta

Ak $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je pravdepodobnostný priestor, f nezáporná, integrovateľná funkcia, tak zobrazenie $\nu : \mathcal{S} \to R$ definované rovnosťou

$$\nu(E) = \int_E f d\mu,$$

je miera. Navyše platí implikácia

$$\mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0.$$

Poslednej implikácii hovoríme, že je ν absolútne spojitá podľa μ. Radonova - Nikodymova veta tvrdí opak.

Veta 1 (Radon - Nikodym). Nech $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je pravdepodobnostný priestor, $\nu : \mathcal{S} \to R$ konečná miera, absolútne spojitá podľa μ (t.j. $\mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0$). Potom existuje taká integrovateľná funkcia f, že

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

pre každé $E \in \mathcal{S}$.

V dôkaze uvedenej vety sa vyskytujú množinové funkcie, ktoré sú σ-aditívne, no nemusia byť nezáporné. Prototypom je funkcia κ definovaná vzťahom

$$\kappa(E) = \int_E f d\mu,$$

pričom f nie je nezáporná.

Definícia. Nech $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožín množiny Ω. Funkcia $\kappa : \mathcal{S} \to R$ sa nazýva zovšeobecnená miera, ak pre ľubovoľné množiny $A_n \in \mathcal{S}$ $(n = 1, 2, ...)$, také, že $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ platí

$$\kappa(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \kappa(A_n).$$

Veta 2 (Hahnov rozklad). Nech κ je zovšeobecnená miera na σ-algebre $\mathcal{S}$ podmnožín množiny Ω. Potom existujú také množiny $A, B \in \mathcal{S}$, že $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \Omega$ a

$\kappa(E) \geq 0$ pre $E \in \mathcal{S}, E \subset A$,

$\kappa(E) \le 0$ pre $E \in \mathcal{S}, E \subset B$.

Dôkaz. Ak je κ nezáporná, stačí vziať $A = \Omega, B = \emptyset$, ak je κ nekladná zase stačí vziať $A = \emptyset, B = \Omega$. Rozoberme všeobecný prípad.

Množinu $C \in \mathcal{S}$ nazveme zápornou, ak $\kappa(E) \le 0$ pre všetky $E \in \mathcal{S}, E \subset C$. Uvažujme disjunktné systémy záporných množín C, ktoré majú zápornú mieru $\kappa(C) < 0$. Nech $\mathcal{B}$ je maximálny systém s uvedenou vlastnosťou. Uvážme, že $\mathcal{B}$ je spočítateľný systém. Totiž

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n,$$

kde

$$\mathcal{B}_n = \{C \in \mathcal{S}; \kappa(C) < -\frac{1}{n}\}.$$

Pritom $\mathcal{B}_n$ je dokonca konečný systém, lebo miera κ je konečná.

Keďže systém $\mathcal{B}$ je spočítateľný, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ...\}$, môžeme položiť

$$B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{S}.$$

Ak $E \subset B$, tak $E = \bigcup_{i=1}^{\infty}(E \cap B_i)$, teda

$$\kappa(E) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \kappa(E \cap B_i) \le 0,$$

keďže každá B_i je záporná.

Definujme $A = \Omega - B$. Nech $E \in \mathcal{S}, E \subset A$. Máme dokázať, že $\kappa(E) \ge 0$. Nech to nie je pravda. Potom existuje $E \in \mathcal{S}, E \subset A, \kappa(E) < 0$. Keby množina E bola záporná, bol by to spor s maximalitou systému $\mathcal{B}$, lebo

$$\mathcal{B} \cup \{E\} = \{E, B_1, B_2, ...\}$$

by bol väčší ako maximálny. Existuje teda $F \in \mathcal{S}, F \subset E, \kappa(F) > 0$. Podobnou metódou ako sme získali $B_1, B_2, ...$, môžeme získať maximálny disjunktný systém $\{G_1, G_2, ...\}$ podmnožín množiny E kladnej miery $\kappa(G_i) > 0$ $(i = 1, 2, ...)$. Potom $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \subset E$ má kladnú mieru, ale množina $E - G$ už podmnožinu kladnej miery neobsahuje, teda je záporná. Navyše

$$0 > \kappa(E) = \kappa(E - G) + \kappa(G).$$

Keďže $\kappa(G) > 0$, je $\kappa(E - G) < 0$, pričom $E - G$ je záporná. To je spor s maximalitou systému $\mathcal{B}$, lebo systém

$$\{E - G, B_1, B_2, ...\}$$

je väčší ako maximálny. Vidíme teda, že $\kappa(E) \geq 0$ pre všetky $E \in \mathcal{S}, E \subset A$.

Ozbrojení takým silným prostriedkom, akým je veta 2, môžeme sa pustiť do dôkazu vety 1. Najprv hľadanú funkciu zostrojíme. Nech

$\mathcal{K} = \{f; f \text{integrovateľná}, \forall E \in \mathcal{S} : \int_E f d\mu \leq \nu(E)\}$.

Pretože $\int_\Omega f d\mu \leq \nu(\Omega)$, je množina

$$\{\int_\Omega f d\mu; f \in \mathcal{K}\}$$

ohraničená, existuje teda

$$a = \sup\{\int_\Omega f d\mu; f \in \mathcal{K}\}.$$

Nech $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ je taká postupnosť funkcií z $\mathcal{K}$, že

$$a = \sup\{\int_\Omega g_n d\mu; n \in N\}.$$

Ak položíme $f_n = \max(g_1, ..., g_n), (n = 1, 2, .,)$, dostaneme takú neklesajúcu postupnosť z $\mathcal{K}$, že

$$a = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Ak položíme $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, tak

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = a.$$

Navyše pre ľubovoľné $E \in \mathcal{S}$ platí

$$\int_E f d\mu = \int_\Omega f \chi_E d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \chi_E d\mu \leq \nu(E).$$

Teda aj f patrí do $\mathcal{K}$.

Vieme, že $\int_E f d\mu \leq \nu(E)$ pre ľubovoľné $E \in \mathcal{S}$. Máme dokázať rovnosť. Ak tá rovnosť neplatí všade, existuje také $F \in \mathcal{S}$, že $\int_F f d\mu < \nu(F)$. Ak definujeme $\nu_0 : \mathcal{S} \to R$ rovnosťou

$$\nu_0(E) = \nu(E) - \int_E f d\mu,$$

tak ν_0 je miera, ktorá nie je identicky nulová. Pre ľubovoľné $n \in N$ položme

$$\nu_n(E) = \nu_0(E) - \frac{1}{n}\mu(E).$$

Nech A_n, B_n je Hahnov rozklad vzhľadom na zovšeobenenú mieru ν_n, teda $\nu_n(E) \geq 0$, ak $E \subset A_n, \nu_n(E) \leq 0$, ak $E \subset B_n$. Položme

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Potom

$$\nu_n(B_n) = \nu_0(B_n) - \frac{1}{n}\mu(B_n) \leq 0,$$

teda

$$\nu_0(B) \leq \nu_0(B_n) \leq \frac{1}{n}\mu(B_n), (n = 1, 2, ...)$$

odkiaľ dostávame, že $\nu_0(B) = 0$. Ale

$$\Omega - B = \Omega - \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega - B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

Keďže ν_0 nie je identicky nulová, máme $\nu_0(A) > 0$. Existuje teda také $m \in N$, že

$$0 < \nu_0(A_m) = \nu(A_m) - \int_{A_m} d\mu.$$

Označme $A_m = C, \frac{1}{m} = \varepsilon$, teda $\nu_0(C \cap E) - \varepsilon\mu(C \cap E) \geq 0$. Pretože ν je absolútne spojitá podľa μ, je tak $\nu(C) > 0$ ako aj $\mu(C) > 0$. Definujme

$$g = f + \varepsilon\chi_C,$$

čo je integrovateľná funkcia,

$$\int_\Omega g d\mu = \int_\Omega f d\mu + \varepsilon\mu(C) > \int_\Omega f d\mu = a.$$

Ak teda ukážeme, že $g \in \mathcal{K}$ dôjdeme k sporu. Nech teda $E \in \mathcal{S}$ je ľubovoľné, potom

$$\int_E g d\mu = \int_E f d\mu + \varepsilon\mu(C \cap E) \leq \int_E f d\mu + \nu_0(C \cap E).$$

Ale

$$\int_E f d\mu + \nu_0(C \cap E) = \int_E f d\mu + \nu(C \cap E) - \int_{C \cap E} f d\mu =$$

$$= \int_{E-C} f d\mu + \nu(C \cap E) \leq$$

$$\leq \nu(E - C) + \nu(C \cap E) = \nu(E).$$

Literatúra

[1] Janková K., Pázman A.: Pravdepodobnosť a štatistika. UK Bratislava 2011.

[2] Riečan B.: O pravdepodobnosti a miere. Alfa Bratislava 1971.

[3] Riečan B., Neubrunn T.: Teória miery. VEDA Bratislava 1992.

[4] Zvára K., Štěpán J.: Pravděpodobnost a matematická statistika. Matfyzpres 1997.

Obsah

Názov:	MINITEÓRIA PRAVDEPODOBNOSTI
Autor:	Beloslav Riečan
Vydavateľ:	© BELIANUM. Vydavateľstvo UMB v Banskej Bystrici
Edícia:	Fakulta prírodných vied
Vydanie:	prvé
Počet strán:	52
Formát:	CD
Rok vydania:	2015
Miesto vydania:	Banská Bystrica

ISBN 978-80-557-0908-6